FISICA

Problemas Propuestos y Resueltos

Miguel Tasiguano S.
Xavier Camacho M.
Oswaldo Aldaz P.
Patricio Vallejo A.

PROFESORES DE LA
ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
Quito-Ecuador

QUINTA EDICIÓN

Corregida y aumentada

VECTORES

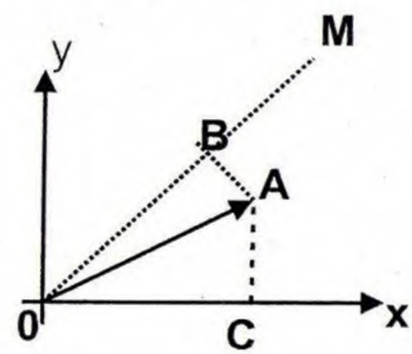
1.- Un vector $\vec{A}$ forma un ángulo de 30° con el eje (x). Su proyección sobre la línea de acción del vector $2\vec{i} + 2\vec{j}$ es de 10 unidades. Determinar:

a) La dirección del vector $\vec{A}$

b) La expresión del vector $\vec{A}$ en función del unitario anterior

a.- Sea OM la recta que coincide con la línea de acción del vector $2\vec{i} + 2\vec{j}$. La proyección del vector $\vec{A}$ sobre esta línea es igual a 10 unidades.

El ángulo agudo BOA es igual a 15°.



$$OA = \frac{10}{\cos 15^o} = 10.33\,u$$

AC= 10.33 sen 30° = 5,165 u

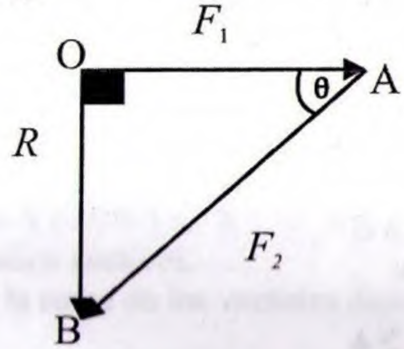
$\overrightarrow{OA} = 8.946\,\vec{i} + 5.165\vec{j}$

OA = $(8.946)^2 + (5.165)^2 = 10.33\,u$

$$\vec{u}_{OA} = \frac{\overrightarrow{OA}}{OA} = \frac{8.946\vec{i} + 5.165\vec{j}}{10.33}$$

b.- $\overrightarrow{OA} = 10.33\,\vec{u}_{OA}$

2.- Dos fuerzas $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ actúan sobre un cuerpo de tal manera que la fuerza resultante tiene un módulo igual al de $\vec{F_1}$ y es perpendicular a ella. Si $\vec{F_1}$ es igual a 10 unidades. Determinar el valor y la dirección de la fuerza F_2 , con respecto a la fuerza F_1.



Si F_1= R el triángulo formado es isósceles por lo que el ángulo OAB = 45º

$$F_2^2 = F_1^2 + R^2$$

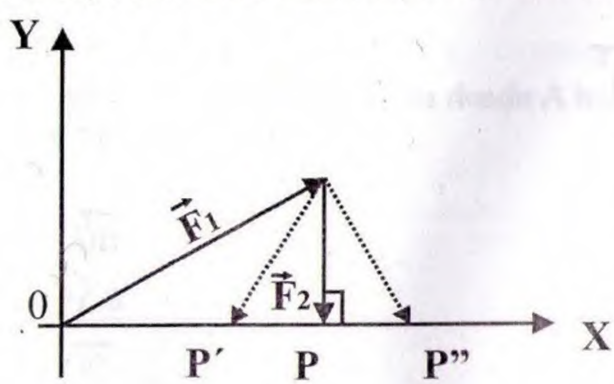
$$F_2 = \sqrt{(10)^2 + (10)^2}$$

F_2 = 14.14 unidades

$$\tan\theta = \frac{R}{F_2} = 1$$

$$\theta = 45^\circ$$

3.- Una persona hala de un objeto con una fuerza dada por el vector $\vec{F_1} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ unidades. Determinar vectorialmente la mínima fuerza F_2 que debe hacer otra persona para que el objeto se mueva únicamente en la dirección Este.

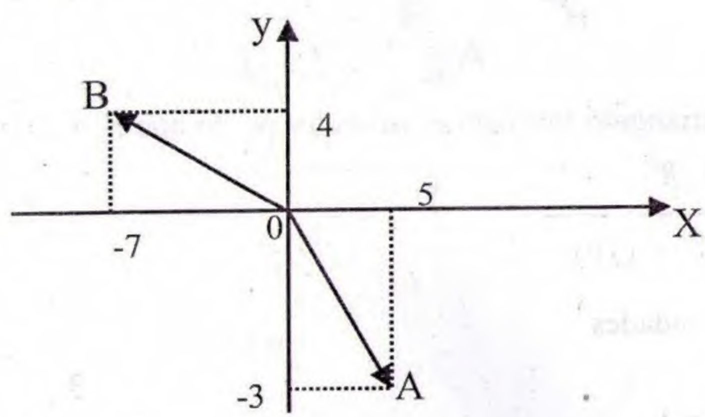


Toda partícula se mueve en la dirección de la Fuerza resultante. Si al vector inicial se le suma otro vector de manera que la resultante coincida con la dirección Este; como pudiera ser OP′, OP u OP" . Pero para que esta sea mínima se debe escoger la que sea perpendicular, ya que es la menor.

Por lo tanto $\vec{F_2} = 3\,j$ unidades

Dando un sistema de coordenadas XY y los puntos A(5 ; - 3) u , B(-7 ; 4) u
Determinar en términos de $\vec{i}$, $\vec{j}$.

a) La posición de A
b) La posición de B
c) La distancia entre A y B
d) La posición de A con respecto a B
e) El vector unitario de B hacia A



a) $\overrightarrow{OA} = 5\,\vec{i} - 3\,\vec{j}$ u

b) $\overrightarrow{OB} = -7\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$

c) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{BA} = 12\,\vec{i} - 7\,\vec{j}$ u

$BA = \sqrt{(12)^2 + (-7)^2}$

$BA = 13.89$ u

d) $\vec{r}_{B/A} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$$\vec{r}_{B/A} = -12\,\vec{i} + 7\,\vec{j}\ u$$

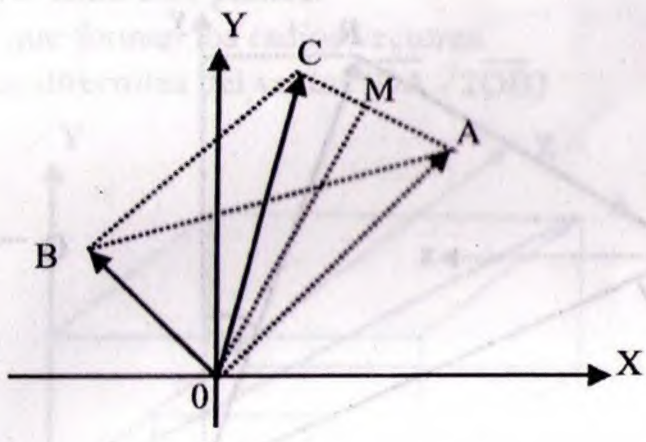
e) $$\vec{u}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$$

$$\vec{u}_{AB} = \frac{12i - 7\,j}{13.89}$$

$$\vec{u}_{AB} = 0.864i - 0.504j$$

5.- Dados los puntos A (2 ; 4) u; B (-2 ; 2) u y C (1 ; 5) u

a) Expresar sus radios vectores.
b) Demostrar que la suma de los vectores dados por los lados del triángulo es igual a cero
c) Encontrar el vector que coincida con la mediana trazada desde el punto B.



a. - $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j}\ u$

$\overrightarrow{OB} = -2\vec{i} + 2\vec{j}\ u$

$\overrightarrow{OC} = \vec{i} + 5\vec{j}\ u$

b.- Si se determina los vectores que van desde A hasta B, de B hasta C, y de C hasta A se tiene que:

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{BC} = 3\vec{i} + 3\vec{j}\ u$

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{CA} = \vec{i} - \vec{j}$ u

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AB} = -4\vec{i} - 2\vec{j}$ u

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \hat{0}$

c.- La mediana divide al lado en dos partes iguales

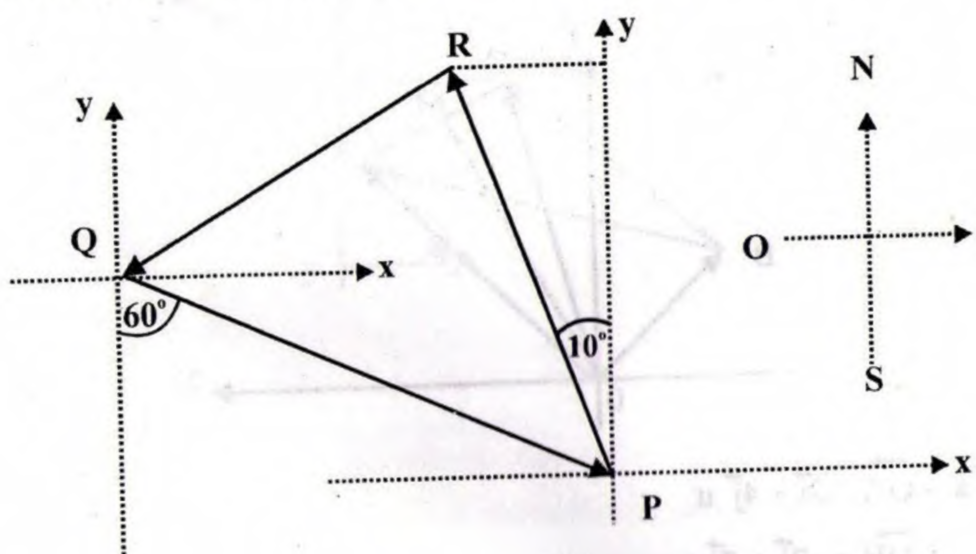
$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CA}/2$

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}$

$\overrightarrow{BM} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 0.5\vec{i} - 0.5\,\vec{j}$ u

$\overrightarrow{BM} = 3.5\vec{i} + 2.5\vec{j}$ u

6.- La posición de P con respecto a Q esta dada por S 60º E ; 80 Km . Otra ciudad R se halla localizada respecto a P en la posición N 10º O ; 120 Km . ¿Cuál es la posición de Q con respecto a R?



Determinamos $\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{PR}$ en función de los unitarios $\vec{i}, \vec{j}$, y $\vec{k}$

$QP_y = 80 \cos 60°$ u

$QP_y = 40$ u

$QP_x = 80 \text{ sen } 60°$ u

$QP_x = 69.28$ u

$PR_Y = 120 \cos 10^{o}$

$PR_Y = 118.18$ u

$PR_x = 120$ sen 10^{o} u

$PR_x = 20.84$ u

$\overrightarrow{PR} = -20.84\,\vec{i} + 118.18\,\vec{j}$ u

La posición de Q con respecto a R esta dada por el vector $\overrightarrow{RQ}$

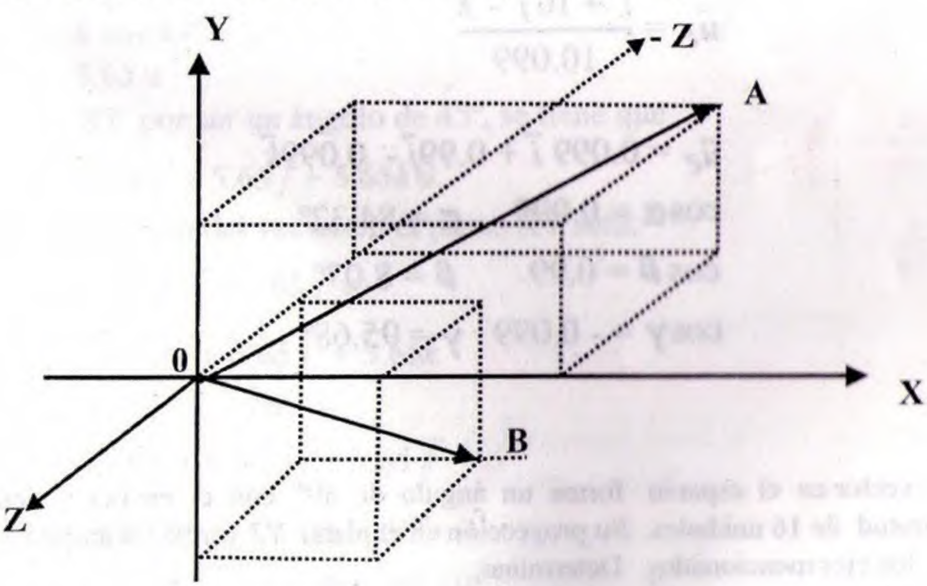
luego será el vector negativo de la suma $\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}$

$\overrightarrow{RQ} = -(\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR})$

$\overrightarrow{RQ} = -48.45\,\vec{i} - 78.17\,\vec{j}$ Km.

7.- Dados los puntos A(3,4,-5) u y B(1, -3, -2) u. Determinar:

a) Los radios vectores o vectores de posición de los puntos anteriores
b) La distancia entre esos puntos.
c) El ángulo que forman los radios vectores.
d) los cosenos directores del vector $(\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB})$



Por la correspondencia entre las coordenadas de un punto y los módulos de las componentes de un vector posición se puede escribir:

a) $\overrightarrow{OA} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 5\,\vec{k}$ u

$\overrightarrow{OB} = \vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}\ u$

b) La distancia entre A y B será el módulo del vector AB

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} - 7\vec{j} + 3\vec{k}\ u$

$AB = \sqrt{(-2)^2 + (-7)^2 + (3)^2}$

$AB = 7.87$ u

c) Para encontrar el ángulo se aplica la ley de los cosenos.

$$\cos\theta = \frac{(7.07)^2 + (3.74)^2 - (7.87)^2}{2(7.07)(3.74)}$$

$\theta = 87.83^{\circ}$

d) El vector $\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} = \vec{i} + 10\vec{j} - \vec{k}$ a este vector se le denomina $\vec{C}$ por lo tanto, el módulo $\vec{C}$ es igual a 10.099

$$\vec{u}_{\vec{C}} = \frac{\vec{i} + 10\vec{j} - \vec{k}}{10.099}$$

$\vec{u}_{\vec{C}} = 0.099\,\vec{i} + 0.99\vec{j} - 0.099\vec{k}$

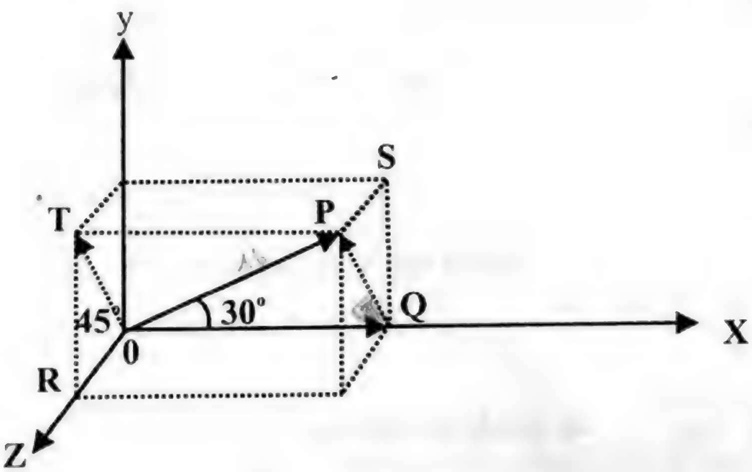
$\cos\alpha = 0.099 \qquad \alpha = 84.32^{\circ}$

$\cos\beta = 0.99 \qquad \beta = 8.07^{\circ}$

$\cos\gamma = -0.099 \qquad \gamma = 95.68^{\circ}$

8.- Un vector en el espacio forma un ángulo de 30° con el eje (x) y tiene una magnitud de 16 unidades. Su proyección en el plano YZ forma un ángulo de 45° con los ejes mencionados. Determinar:

a) El vector proyección en el plano XY
b) El vector unitario paralelo al vector en el espacio
c) El valor de los ángulos directores



a) Sea el prisma rectangular que contiene el vector.

OT = QP

$\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP}$

OQ= 16 cos30º

OQ= 13.85 u

$PQ= \sqrt{(16)^2 - (13.85)^2}$

OT = PQ = 8 u

OR= 8 cos 45º

OR= 5.65 u

OR = RT por ser un ángulo de 45º, se tiene que

$\overrightarrow{OP} = 13.85\vec{i} + 5.65\,\vec{j} + 5.65k\ u$

La proyección del vector en el plano XY será:

$\overrightarrow{OP}_{xy} = 13.85\vec{i} + 5.65\,\vec{j}\ u$

b) $\vec{u}_{op} = \dfrac{13.85\vec{i} + 5.65\,\vec{j} + 5.65\vec{k}}{16}$

$\vec{u}_{op} = 0.866\,\vec{i} + 5.65\,\vec{j} + 5.65\,\vec{k}$

c) $\cos\alpha = 0.866 \qquad \alpha = 30^{o}$

$\cos\beta = 0.35 \qquad \beta = 69.29^{o}$

$\cos\gamma = 0.35 \qquad \gamma = 69.29^{o}$

La proyección de un vector en el plano YZ es : $a\vec{j} + a\vec{k}$, el vector forma un ángulo θ con el eje X y tiene un módulo igual a 2a. Calcule:

a) El vector en términos de los unitarios normalizados.

b) El vector unitario paralelo a la proyección del vector en el plano XZ
c) Los cosenos directores.

a) $\vec{A}_{YZ} = a\vec{j} + a\vec{k}$

si el ángulo que forma el vector con el eje X, se denomina α
y el módulo del vector A = 2a

$\vec{A} = \vec{A}_X + a\vec{j} + a\vec{k}$

$2a = \sqrt{(Ax)^2 + a^2 + a^2}$ de donde se obtiene:

$A_X = a\sqrt{2}$

$A = a\sqrt{2}\,\vec{i} + a\vec{j} + a\vec{k}$

b) $A_{xz} = a\sqrt{2}\,\vec{i} + a\vec{k}$

$A_{xz} = \sqrt{2a^2 + a^2}$

$$\vec{u}_{A_{xz}} = \frac{\vec{A}_{XZ}}{A_{XZ}} = \frac{\sqrt{2}a\vec{i} + a\vec{k}}{\sqrt{3}a} = \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{i} + \sqrt{\frac{1}{3}}\vec{k}$$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}a}{2a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos \beta = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

$\cos\gamma = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

10.- Dado el siguiente vector en el espacio $\vec{A} = \sqrt{3}a\vec{i} + 2a\vec{j} - 3a\vec{k}$. Determinar:

a) Los cosenos directores
b) El ángulo que forma el vector con su proyección en el plano XZ
c) El vector unitario paralelo al vector proyección en el plano XZ
d) El ángulo que forma el vector con su proyección en el eje y.

a) El módulo del vector es : $A = \sqrt{3a^2 + 4a^2 + 9a^2} = 4a$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}a}{4a} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos ß = \frac{2a}{4a} = \frac{2}{4}$$

$$\cos\gamma = \frac{-3a}{4a} = -\frac{3}{4}$$

b) El vector es la hipotenusa de todos los triángulos de los que forma parte dentro del prisma

$$\cos\theta = \frac{A_{XZ}}{A} = \frac{\sqrt{A_X^2 + A_Z^2}}{A} = \frac{\sqrt{3a^2 + 9a^2}}{4a} = \frac{3}{2}$$

$\theta = 30°$

c) $A_{xz} = \sqrt{3}a\vec{i} - 3a\vec{k}$

$$\vec{u}_{A_{XZ}} = \frac{\vec{A}_{XZ}}{A} = \frac{\sqrt{3}a\vec{i} - 3a\vec{k}}{\sqrt{3a^2 + 9a^2}} = 0.5\vec{i} - 0.866\vec{k}$$

d) Es el ángulo director ß

$$\cos ß = \frac{2a}{4a} = 0.5$$

$\theta = 60°$

1.- Si el cos α de un vector en el espacio es $\frac{\sqrt{2}}{4}$ y el vector forma un ángulo de 45° con el eje Y. Determinar:

a) Los cosenos directores
b) Si el módulo del vector es de 5 unidades, encontrar el vector en función de los unitarios normalizados.
c) La proyección del vector en el plano YZ
d) El ángulo que forma la proyección del vector en el plano XY con el eje Z.
e) Los ángulos directores.

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\beta = 45^{\circ}$$

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

reemplazando los valores anteriores se obtiene:

a) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\gamma = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

b) $\vec{u}_A = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$ y además se tiene que $\vec{A} = A\vec{u}_A$

$\vec{A} = 5(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \dfrac{\sqrt{6}}{4}\vec{k})$ unidades

c) $\vec{A}_{yz} = 5\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + 5\dfrac{\sqrt{6}}{4}\vec{k}$ *unidades*

d) Todas las líneas del plano XY son perpendiculares al eje Z; por lo tanto el ángulo será de 90º

e) $\alpha = 69{,}3^{\circ}$: $\beta = 45^{\circ}$. $\gamma = 52.2^{\circ}$

12.- La proyección de un vector en el plano XZ es $4\vec{i} + 7\vec{k}$ y la proyección de este mismo vector en el eje Y es $-6\vec{j}$. Determinar.

a) El vector en función de los unitarios normalizados.
b) Los cosenos directores.
c) El vector proyección en el plano XY.
d) El vector unitario en el plano XY.

$\vec{A}_{xz} = 4\vec{i} + 7\vec{k}$

$\vec{A}_y = -6\vec{j}$

a) $\vec{A} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + 7\vec{k}\ u$

$A = \sqrt{4^2 + 6^2 + 7^2} = 10.05$ u

b) $\cos\alpha = \dfrac{4}{10.05} = 0.398$

$\cos\beta = \dfrac{-6}{10.05} = -0597$

$\cos\gamma = \dfrac{7}{10.05} = 0.696$

c) $\vec{A}_{XY} = 4\vec{i} - 6\vec{j}\ u$

d) $A = \sqrt{4^2 + 6^2} = 7.21$ u

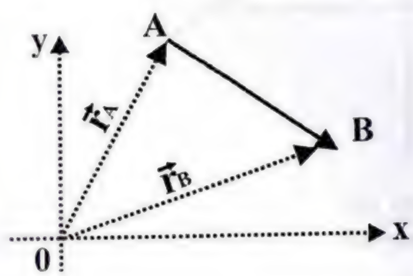
$\vec{u}_{A\,xy} = \dfrac{4}{7.21}\vec{i} - \dfrac{6}{7.21}\vec{j} = 0.55\vec{i} - 0.83\vec{j}$

13.-Si se tienen los puntos A (3,-1,4) m y B (2,2,2) m. Determinar

a) El vector posición de B con respecto a A.

b) El ángulo que forma el vector con el eje Z.

a)



Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = B/A$

$\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\ m$

$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}\ m$

$\overrightarrow{AB} = (2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) - (3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k})$

$\overrightarrow{AB} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ m

c) $\cos\gamma = \dfrac{-2}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2}}$

$\gamma = 122.31°$

14.- Dado el vector $\vec{B} = \frac{a}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}a}{2}\vec{j} + a\vec{k}$, un vector $\vec{A}$ cuyo módulo A es igual a 6 a y que su proyección en el plano XY , tiene un módulo igual a 3 a y forma un ángulo de 30º con el eje Y. Determinar:

a) El vector A en términos de los unitarios normalizados.
b) El ángulo que forma el vector $\vec{B} - \vec{A}$ con su proyección en el plano XY
c) El vector unitario paralelo al vector $\vec{A} - \vec{B}$.
d) El ángulo que forma el vector $\vec{A} - \vec{B}$ con el eje X.
e) El módulo de la proyección del vector $\vec{A} - \vec{B}$ con el eje X.

$$A = 6a$$

$$A_{xy} = 3a$$

$$A_y = A_{xy} \cos 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} a$$

$$A_y = A_{xy} \cos 60^\circ = 1.5a$$

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^3$$

a) $$A_z = 3\sqrt{3}\ a\vec{k}$$

$$\vec{A} = 1.5a\vec{i} + \frac{3\sqrt{3}}{2} a\vec{j} + 3\sqrt{3}a\vec{k}$$

$$\vec{B} - \vec{A} = -a\vec{i} - \sqrt{3}a\vec{j} + (1 - 3\sqrt{3})a\vec{k}$$

$$\vec{B} - \vec{A} = -a\vec{i} - 1.73a\vec{j} + 4.1a\vec{k}$$

$$\cos\theta = \frac{\left|(\vec{B} - \vec{A})_{xy}\right|}{\left|(\vec{B} - \vec{A})\right|} = \sqrt{\frac{a^2 + 3a^2}{a^2 - 3a^2 + (4.2a)^2}} = 0.43$$

$$\theta = 64.5^\circ$$

$$\vec{U}_{(\vec{A} - \vec{B})} = \frac{A - B}{|A - B|} = \frac{a\vec{i} + \sqrt{3a\vec{j}} + 4.2a\vec{k}}{4.648a}$$

c) $$\vec{U}_{(\vec{A} - \vec{B})} = 0.21\vec{i} + 0.37\vec{j} + 0.88\vec{k}$$

d) $\cos \beta = \dfrac{\sqrt{3}}{4.64} = 0.373$

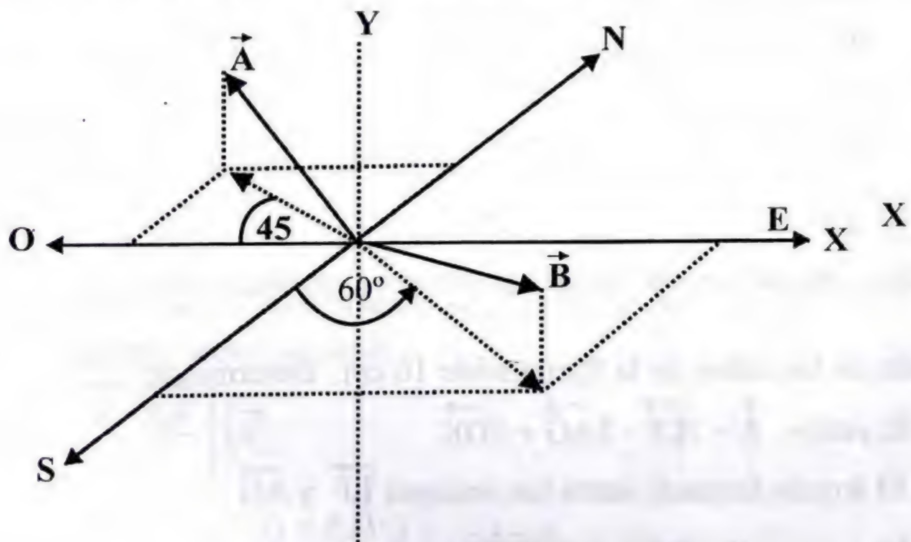
$\beta = 68.1^o$

e) $\left|\bar{A} - \bar{B}\right|_X = a$

15.- Un cohete tiene dos motores de retropropulsión. El primer motor impulsa al cohete en la dirección N-O con un ángulo de elevación de 60º y con una rapidez de 200 unidades ; el segundo motor lo impulsa en la dirección S 60º E; con un ángulo de elevación de 45º y una rapidez de 160 unidades. Determinar:

a) La velocidad del cohete en términos de los unitarios normalizados.

b) La dirección de la velocidad resultante del cohete.



Sean los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ los que representen a las velocidades de los dos motores : todos los triángulos formados en el gráfico son rectángulos por lo que se puede hallar las respectivas componentes aplicando las funciones trigonométricas.

$A_{XZ} = A \cos 60^o = 200 * 0.5 = 100$ u

$A_X = A_{XZ} \cos 45^o = 100 * 0.707 = 70.7$ u

$A_z = A_{XZ}$ sen$45^o = 100 * 0.707 = 70.7$ u

$A_y = A$ sen$60^o = 200 * 0.866 = 173.2$ u

$\vec{A} = -70.7\vec{i} + 173.2\vec{j} - 70.7\vec{k}$ u

$B_{xz} = B \cos 45^o = 160*0.707 = 113.14$ u

$B_x = B_{XZ} sen60^o = 113.14*0.866 = 97.97$ u

$B_z = B_{XZ} cos60^o = 113.14*0.5 = 56.57$ u

$B_y = Bsen45^o = 160*0.707 = 113.14$ u

$\vec{B} = 97.97\vec{i} + 113.14\vec{j} + 56.57\vec{k}$

a) La velocidad resultante es la suma de las dos velocidades.

$\vec{V}_R = \vec{A} + \vec{B}$

$\vec{V}_R = 27.27\vec{i} + 286.34\vec{j} - 14.13\vec{k}$

b) La dirección será determinada por el ángulo de giro θ y el de elevación ϕ

$$tg\phi = \frac{286.34}{\sqrt{(27.27)^2 + (14.13)^2}}$$

$\phi = 83.88^o$

$$tg\theta = \frac{14.13}{27.27}$$

$\theta = 27.56^o$

La dirección del ángulo de giro puede ser expresada como E 27.56ºN.

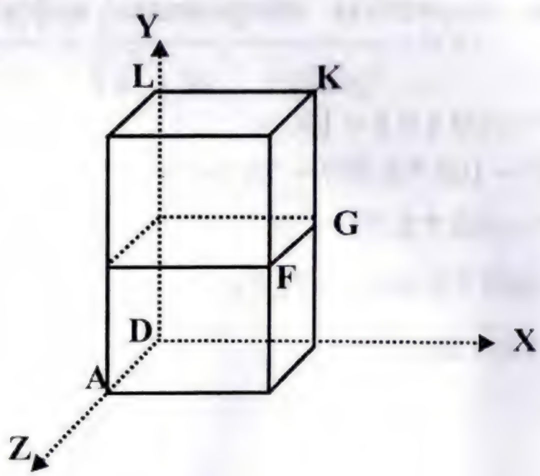
16.- El lado de los cubos de la figura mide 10 cm. Determinar:

a) El vector $\vec{R} = 2\overrightarrow{LF} - 3\overrightarrow{AG} + 5\overrightarrow{DK}$

b) El ángulo formado entre los vectores $\overrightarrow{LF}$ y $\overrightarrow{AG}$

c) La proyección del vector $\overrightarrow{DK}$ en la dirección del vector $\overrightarrow{LF}$

d) El unitario $\overrightarrow{LF}$



Se determina los siguientes vectores:

$\overrightarrow{LF} = 10\vec{i} - 10\vec{j} + 10\vec{k}$ cm

$LF = \sqrt{(10)^2 + (-10)^2 + (10)^2} = \sqrt{300}$ cm

$\overrightarrow{AG} = 10\vec{i} + 10\vec{j} + 10\vec{k}$ cm

$AG = \sqrt{300}$ cm

$\overrightarrow{DK} = 10\vec{i} + 20\vec{j}$ cm

$DK = \sqrt{(10)^2 + (20)^2} = \sqrt{500}$ cm

$\vec{R} = 2(10\vec{i} - 10\vec{j} + 10\vec{k}) - 3(10\vec{i} + 10\vec{j} - 10\vec{k}) + 5(10\vec{i} + 20\vec{k})$

a) $\vec{R} = 40\vec{i} - 50\vec{j} + 150\vec{k}$ cm

b) Utilizando el producto escalar entre dos vectores se puede escribir

$\overrightarrow{LF} \bullet \overrightarrow{AG} = LF\,(AG)\cos\theta$

$10(10) + (-10).10 + 10(-10) = \sqrt{300}.\sqrt{300}\cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{-100}{+300} = -0.333 \qquad \theta = 109.47^{o}$

c) Utilizando la ecuación para obtener la proyección de un vector en la dirección de otro vector se tiene:

$$\overrightarrow{DK}_{LF} = \left(\frac{\overrightarrow{DK} \bullet \overrightarrow{LF}}{(LF)^2}\right)\overrightarrow{LF}$$

$$\overrightarrow{DK}_{LF} = \left(\frac{10.(10).+20.(-10) + 0.(10)}{(\sqrt{300})^2}\right).\,(\vec{1}0i - \vec{1}0j + \vec{1}0k)\text{ cm}$$

$\overrightarrow{DK}_{LF} = -3.33\vec{i} + 3.33\vec{j} - 3.33\vec{k}$ cm

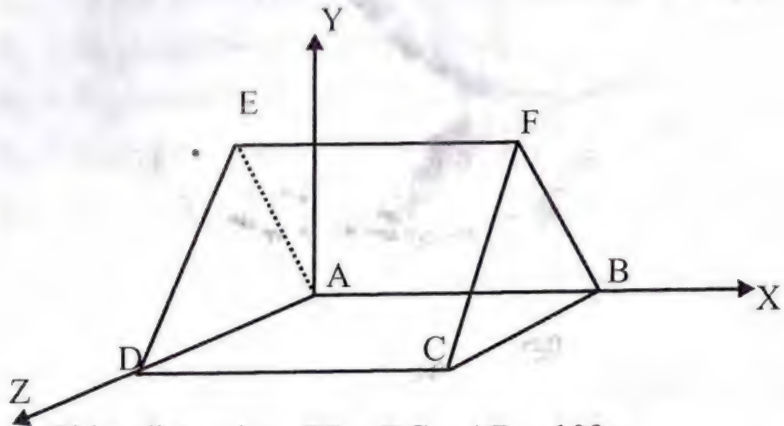
d) $\vec{u}_{LF} = \dfrac{\overrightarrow{LF}}{LF} = \dfrac{10\vec{i} - 10\vec{j} + 10\vec{k}\text{ cm}}{\sqrt{300}\text{ cm}}$

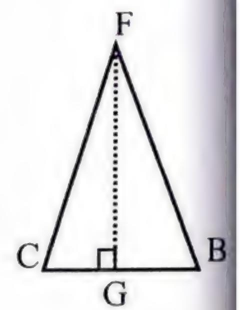
$\vec{u}_{LF} = 0.58\vec{i} - 0.58\vec{j} + 0.58\vec{k}$

17.- En la figura determinar

a) El ángulo formado entre los vectores $\overrightarrow{AF}$ y $\overrightarrow{AD}$

b) La proyección del vector $\overrightarrow{BF}$ sobre el vector $\overrightarrow{BC}$.





Si las distancias EF = DC = AB = 100 u
CF = BF = 50 u
BC = AD = 60 u

Si el triángulo CFB es isósceles, su altura es $GF = \sqrt{(50)^2 - (30)^2}$

$GF = 40$ u

Se determinan los vectores en términos de los unitarios normalizados:

$\overrightarrow{AF} = 100\vec{i} + 40\vec{j} + 30\vec{k}\ u$

$AF = \sqrt{(100)^2 + (40)^2 + (30)^2} = \sqrt{12500}$ u

$\overrightarrow{AD} = 60\vec{k}\ u$

$AD = 60$ u

$\overrightarrow{BF} = 40\,\vec{j} + 30\,\vec{k}\,u$

$BF = \sqrt{(40)^2 + (30)^2} = 50$ u

$\overrightarrow{AC} = 100\,\vec{i} + 60\,\vec{k}\ u$

$AC = \sqrt{(100)^2 + (60)^2} = \sqrt{13600}$

$$\overrightarrow{AF} \bullet \overrightarrow{AD} = (AF)\,(AD)\cos\theta$$

a) $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{AF} \bullet \overrightarrow{AD}}{AF\,.AD} = \dfrac{100 + 40 + 30(60)}{\sqrt{12500}.(60)} = 0.268$

$\theta = 74.45^{\circ}$

b) $\overrightarrow{BF}_{AC} = \dfrac{\overrightarrow{BF} \bullet \overrightarrow{AC}}{(AC)^2} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{BF}_{AC} = \left(\frac{0(100) + 40 + 30(60)}{13600}\right).\left(100\vec{i}+60\vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{BF}_{AC} = 13.24\vec{i} + 7.94\vec{k}\ u$$

18. Dados los vectores $\vec{A} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ u ; $\vec{B}= -7\vec{i} - 8\vec{j} - 8\vec{k}$ u ; y $C = \vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}$ u realiz siguientes operaciones:

a) $\vec{A}+ \vec{B} +3\vec{C}$
b) Determinar el módulo
c) Obtenga el unitario del vector anterior
d) Represente mediante un prisma en el espacio al vector $\vec{A}+\vec{B}+3\vec{C}$
e) Exprese en términos de $\vec{i}, \vec{j}$ y $\vec{k}$ el vector proyección en el plano horizont dibújelo en el prisma
f) Determine el ángulo de giro
g) Determine el ángulo de elevación o depresión
h) Determine el producto escalar entre A y B
i) Calcule la proyección del vector A sobre B
j) Determine el producto vectorial entre A y B

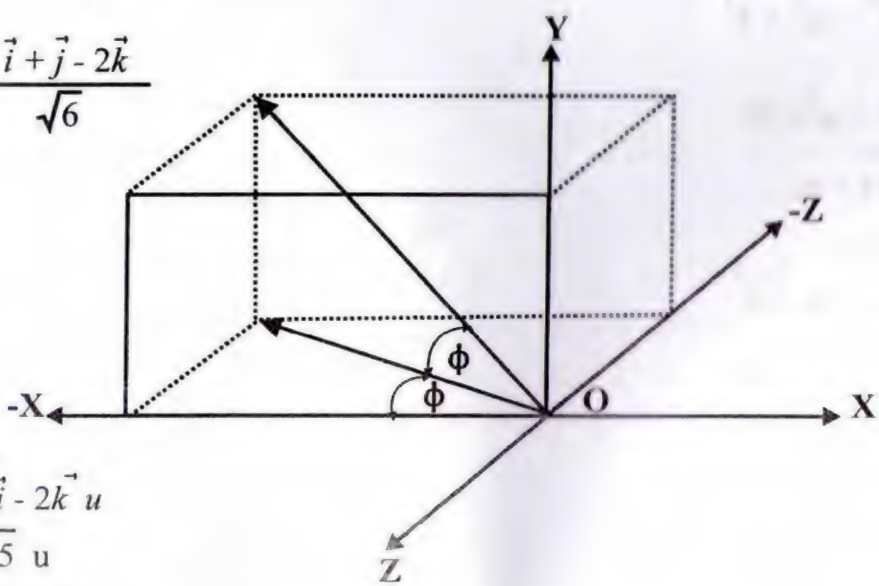
a) $\vec{A} +\vec{B} + 3\vec{C} =(3 - 7 + 3)\vec{i} + (4 + 8 - 3)\vec{j} + (5 + 8 - 15)\vec{k}\,u$

$\vec{A} +\vec{B} + 3\vec{C} = - \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}\,u$

b) $\left|\vec{A} +\vec{B} + 3\vec{C}\right| = \sqrt{- 1+1 +4}$

c) $\vec{u} = \dfrac{- \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{6}}$

d) y e)



f) $\vec{V} = - \vec{i} - 2\vec{k}\ u$

$V = \sqrt{5}$ u

$\theta = tg^{-1}(2/1)$

$\theta = 63.43°$

g) N 26,57° E

$\phi = tg^{-i}\ (1/\ 5)$

$\phi = 24°$

h) $\vec{A} \bullet \vec{B} = 3(x - 7) + (4x)(-8) + (5)(x + 8)$

$\vec{A} \bullet \vec{B} = -13$

i) $\vec{A}_{\vec{B}} = \dfrac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{B^2}\vec{B} = \dfrac{-13}{177}(\vec{B})\ u$

j) $\vec{A} x\, \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & +5 \\ -7 & +8 & +8 \end{vmatrix}$

$\vec{A} x\, \vec{B} = (3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k})\ x\ (-7\vec{i} + 8\vec{j} + 8\vec{k})$

$\vec{A} x\, \vec{B} = -\ 72\vec{i} - 59\vec{j} - 4\vec{k}\ u$

19. El vector $\vec{A} = 3\vec{i} + m\vec{j} + 5\vec{k}$ u es perpendicular al vector $\vec{B} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + n\vec{k}$ u, si el módulo del vector A es igual a 10 - u, determinar los valores de m y n.

$\vec{A} \bullet \vec{B} = \hat{0}$ por ser perpendiculares

$\vec{A} \bullet \vec{B} = -\ 6 + 3m + 5n = 0$

$10 = \sqrt{3^2 + m^2 + 5^2}$

$100 = 9 + m^2 + 25$

$\sqrt{100 - 34} = m$

$m = 8{,}12\ u$

$-\ 6 + 3m + 5n = 0$

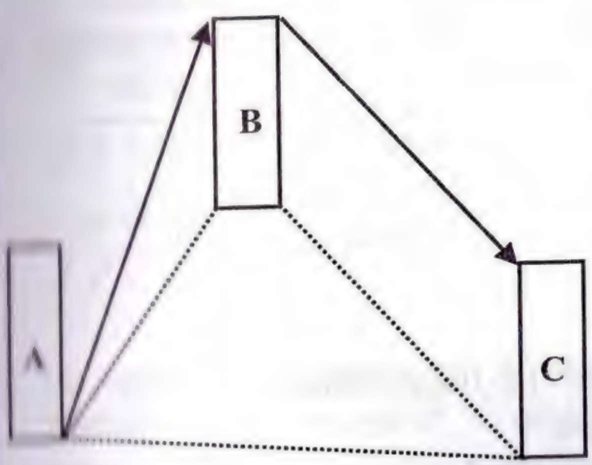
$n = \dfrac{6 - 3\ (8{,}12)}{5}\ u$

$n = -\ 3{,}67\ u$

Desde la base de un edificio (A) se ubica la terraza de un edificio (B) a una distancia de 120 m en dirección N - O, con un ángulo de elevación de 30º; de esta terraza (B) se ubica la terraza de otro edificio (C) a una distancia de 100 metros en dirección $0,5\vec{i} - 0,24\vec{j} + n\vec{k}$. Si los tres edificios están construidos sobre el mismo plano horizontal, determinar.

a) El número de pisos de cada edificio, si se conoce que cada piso tiene una altura de 3m, y que el edificio (A) es 6 m más bajo que el edificio (C).

b) La mínima distancia que deberá recorrer una persona si desea ir de (A) a (B), luego a (C) y regresar a (A).



$$\vec{AB}\begin{cases} AB = 120m \\ N - O \ ;\phi = 30^{\circ} \end{cases}$$

$$\vec{BC}\begin{cases} BC = 100m \\ \vec{u}_{BC} = -0.5\vec{i} - 0.24\vec{j} + n\vec{k} \end{cases}$$

$AB_y = 120 \text{ sen } 30^{\circ} = 60 \text{ (m)}$

$AB_{xz} = 120 \cos 30^{\circ} = 103.92 \text{ (m)}$

$AB_x = AB_{XZ} \text{ sen } 45^{\circ} = -73.48 \text{ (m)}$

$AB_z = AB_{XZcos}\ 45^{\circ} = -73.48 \text{ (m)}$

$\vec{AB} = -73.48\vec{i} + 60\vec{j} - 73.48\vec{k}$ m

$\vec{BC} = (BC)\,\vec{u}_{BC}$

$\hat{u}_{BC} = -0.5\vec{i} - 0.24\vec{j} + n\vec{k}$

Si: $L = \cos\alpha = -0{,}5$, $m = \cos\beta = -0{,}24$; $n = \cos\gamma$

$l^2 + m^2 + n^2 = 1$, de donde $n = 0{,}83$

$\overrightarrow{BC} = 100\left(-0{,}5\,\vec{i} - 0{,}24\,\vec{j} + 0.83\vec{k}\right) = -50\vec{i} - 24\,\vec{j} + 83\vec{k}\ m$

a) $\overrightarrow{AB} = -73{,}48\vec{i} + 60\,\vec{j} - 73{,}48\vec{k}$ m

$h_B = 60\ m$, número de pisos: 60/3 = 20 pisos.

$\overrightarrow{BC} = -50\vec{i} - 24\,\vec{j} + 83\vec{k}$ el edificio (C) es 24 m mas bajo que el edificio (B), entonces, altura del edificio (h_C) = 36 m, número de pisos: 36 / 3 = 12 pisos

El edificio (A) es 6 m más bajo que el edificio (C) $\therefore$ altura del edificio h_A= 30 m, número de pisos de (*A*) = 30 / 3 = 10 pisos.

b) Distancia mínima $(d) = AB_{xz} + BC_{xz} + AC_{xz}$

$\overrightarrow{AB}_{xz} = -73{,}48\vec{i} - 73{,}48\vec{k}\ m$; $\qquad |\overrightarrow{AB}_{xz}| = 103{,}92m$

$\overrightarrow{BC}_{xz} = -50\vec{i} + 83\vec{k}\ m$ $\qquad |\overrightarrow{BC}_{xz}| = 96.90\ m$

$\overrightarrow{AC}_{xz} = \overrightarrow{AB}_{xz} + \overrightarrow{BC}_{xz} = -123.48\vec{i} + 9.52\vec{k}$ $\qquad |\overrightarrow{AC}_{xz}| = 123.85\ m$;

$d = 324.67$ m

21.- Sean los vectores $\vec{A} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}\ u$ y $\vec{B} = 10\vec{i} + 10\vec{j} - 10\vec{k}\ u$. Determinar.

a) El producto vectorial de los dos vectores.
b) El vector unitario del vector producto vectorial.

a)

$$\vec{A}\mathrm{x}\vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & -5 \\ 10 & 10 & -10 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\mathrm{x}\vec{B} = [4(-10)-(-5)(10)]\vec{i} - [3(-10)-(-5)(10)]\vec{j} + [3(10)-4(10)]\vec{k}$$

$$\vec{A}\mathrm{x}\vec{B} = 10\vec{i} - 20\vec{j} - 10\vec{k}\ u$$

b)

$$\vec{u}_{\vec{A}\mathrm{x}\vec{B}} = \frac{\vec{A}\mathrm{x}\vec{B}}{|\vec{A}\mathrm{x}\vec{B}|}$$

$$\vec{u}_{\vec{A}\mathrm{x}\vec{B}} = \frac{10\vec{i} - 20\vec{j} - 10\vec{k}}{\sqrt{100+400+100}}$$

$$\vec{u}_{\vec{A}\mathrm{x}\vec{B}} = 0{,}408\vec{i} - 0{,}816\vec{j} - 0.408\vec{k}$$

Problemas Propuestos

Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, están representados por la altura y la base de un rectángulo respectivamente. Determinar la magnitud y dirección del vector $\vec{A} + 2\vec{B}$. Se conoce que $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se encuentran en el primer cuadrante.

En un sistema de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, la magnitud de B es 10 u y el módulo de $(\vec{B} - \vec{A})$ es 15 u, si el ángulo que forman los vectores $\vec{B}$ y $(\vec{B} - \vec{A})$ es 30º. Determinar:

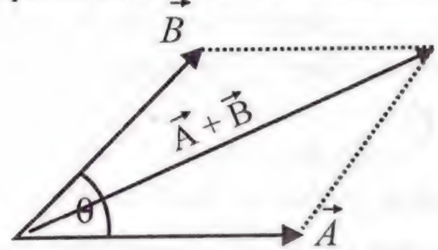
a) La magnitud el vector A.
b) El ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Usando componentes rectangulares, demuestre que el módulo del vector suma $\vec{A} + \vec{B}$, es:

$$\sqrt{A^2 + B^2 + 2\,AB\,\cos\theta}$$

y que el módulo de $\vec{A} - \vec{B}$ es:

$$\sqrt{A^2 + B^2 - 2\,AB\,\cos\theta}$$



Un vector $\vec{A}$ de magnitud 10 unidades forma un ángulo de 30º con la horizontal y otro vector $\vec{B}$ de módulo 16 unidades forma un ángulo de 135º con la misma horizontal. Determinar: El vector $\vec{B} - \vec{A}$, en función de los unitarios $\vec{i}, \vec{j}$.

Dados los puntos A (-2, 1)m; B (2, 3)m; C (4, -2)m y D (-3, 3)m. Demuestre que la suma de los vectores dados por los lados del cuadrilátero ABCD es cero.

En una mesa de billar hay tres bolas A, B, y C. La bola B se encuentra con respecto a A en la posición (E 10º N; distancia 0,4 m) y la bola C se encuentra con respecto a A al (E 15º S; distancia 0,50 m). ¿Cuál es la posición de B con respecto a C en coordenadas geográficas?.

Un avión de aeromodelismo despega en la dirección S - O y con un ángulo de elevación de 30º. Luego de volar en línea recta una distancia de 40 metros desde el punto de partida su dueño desea impactar en un blanco ubicado en el punto B (-6, 5, -3) m?. Determinar:

a) La dirección que debe tomar el avión para lograr su propósito.
b) La posición del avión respecto al blanco.

Dos pistoleros A y B se encuentran sobre el mismo plano horizontal. B se encuentra respecto a A en el punto (-2, 0, -3) m. El pistolero B lanza una

moneda en la dirección S 30º E, ángulo de elevación de 60º y cuando recorre una distancia de 20 m es impactada por una bala del pistolero A Determinar:

a) La dirección del disparo
b) El vector unitario paralelo a la dirección de lanzamiento de la moneda.

9.- Desde lo alto del edificio de administración (60 metros) por medio de un teodolito medimos un ángulo de 15º sobre la horizontal y una distancia de 4 Km. a la Basílica. Luego giramos el teodolito un ángulo de 120º y medimos un ángulo de depresión de 12º al Estadio Olímpico y estimamos una distancia de 6 Km Determinar.

a) La distancia entre la Basílica y el Estadio
b) La posición del Estadio respecto a la Basílica

10.- Un avión de aeromodelismo despega en la dirección N 60º E; ángulo de elevación de 30º, luego de volar en línea recta 60 m gira en la dirección S –E, ángulo de depresión 60º y luego de recorrer en línea recta 30 m, se estrella contra un árbol. Determinar:

a) La posición del árbol en el espacio en función de los unitarios $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, respecto al punto de despegue del avión.

11.- Dados los puntos A(2, -3, 6) y B (-1, 2, -2) unidades. Determinar un vector $\vec{C}$ de módulo $3\sqrt{42}$ unidades, cuya línea de acción coincide con la bisectriz del ángulo formado por los radios vectores de los puntos A y B.

12.- Un vector cuya magnitud es 100 unidades tiene una línea de acción cuyos cosenos directores son $\cos\alpha = 0.7$; $\cos\beta = 0.2$ relativos a un sistema de coordenadas XYZ. Si el vector está localizado en el primer octante y se aleja del origen escríbalo en términos de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

13.- Determinar la suma de tres vectores $\vec{A}, \vec{B}$ y $\vec{C}$ en donde ; $\vec{A} = 5\vec{i} - 10\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{B} = 9\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ y $\vec{C}$ es un vector de módulo $12\sqrt{2}$ localizado en el plano XY, que forma un ángulo de 45º con la dirección positiva del eje de las X y se aleja del origen.

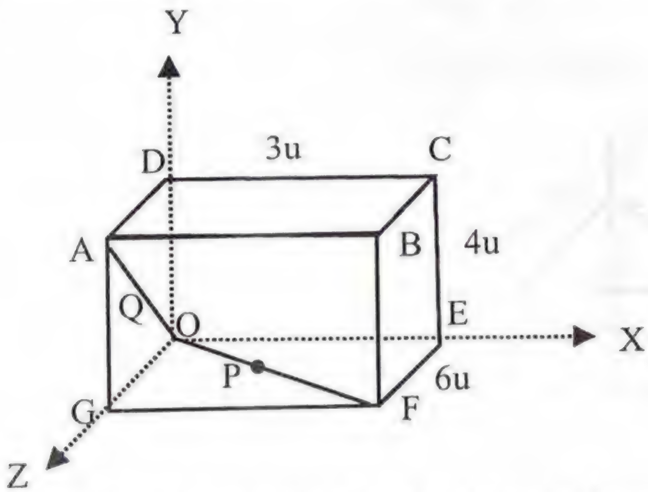
14.- Determinar la proyección de una fuerza de 10 Kgf cuyos cosenos directores son 0,29; 0,4 y - 0,87, sobre la línea de acción de otro vector cuyos cosenos directores son -0,2; 0,6 y 0,775.

15.- Para que valores de "m" forman un ángulo de 60º entre sí, los vectores que van de (2, -7, 5) a (7, 1, -3; y de (8, m, -4) a (4, -2, 1).

16.- En el prisma de la figura P y Q son los puntos medios de las diagonales OF y OA. Determinar:

a) La posición de P respecto a Q.
b) ¿Cuál es la posición geográfica de B respecto a Q (latitud y longitud)?

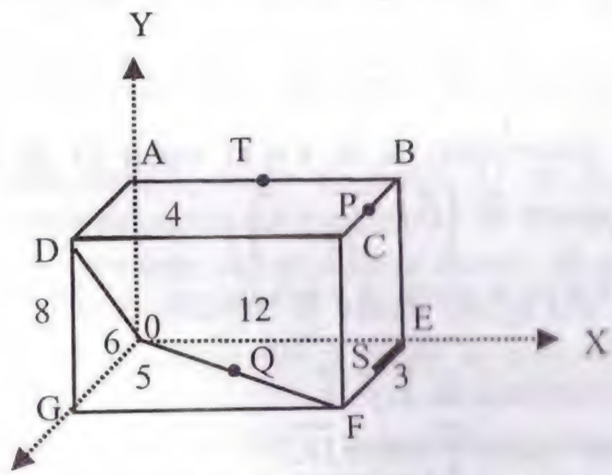
c) ¿Cuál es la proyección del vector $\overrightarrow{OD}$ sobre la línea de acción del vector PO?



7.- En el paralelepípedo ABCDEFGO, indicado en la figura, determinar:

a) Los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{ST}$ en función de sus componentes normalizadas.

b) El ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{ST}$



8.- En un aeropuerto se presenta la siguiente situación. Un avión (B) se halla parqueado en la posición N 30º E; distancia 200 metros respecto a la base de una torre de control de 15 metros de altura. En ese instante otro avión (A) se encuentra en la dirección S - O, a una altura de 400 metros de la pista y a una distancia de 2.000 metros respecto a la base de la torre anterior. Determinar

a) La posición del avión B respecto al A

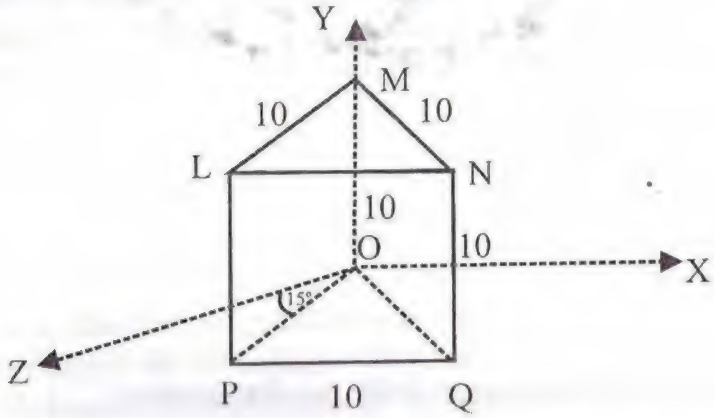
b) La distancia entre los dos aviones.

9.- En la figura determinar.

a) La dirección del vector $\overrightarrow{LN}$.

b) El vector proyección de $\overrightarrow{OQ}$ sobre $\overrightarrow{OL}$.

c) El vector unitario paralelo al vector $\overrightarrow{OL}$



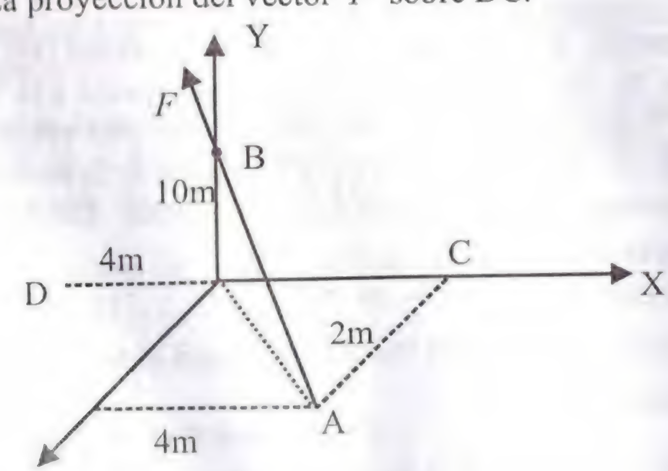
20.- Un aviador vuela de Washington a Manila. Determine: El vector desplazamiento, si las latitudes y longitudes de las ciudades son: (39° N; 77°O) y (15° N; 121° E) respectivamente. El radio de la tierra es aproximadamente 6.370 Km.

21.- Dado los vectores: $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{B} = -2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{C} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ · y $\vec{D} = a\vec{A} - b\vec{B} - c\vec{C}$. Determinar: a, b, c si el vector D es la posición de A respecto a B mas el vector $\vec{C}$ $\left(\vec{D} = \vec{P}_{A/B} + \vec{C}\right)$.

22.- Se tiene una cuerda fija en el punto A y se hala con una fuerza de 100 N, desde el punto B. Determinar:

a) El vector $\vec{F}$ en términos de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

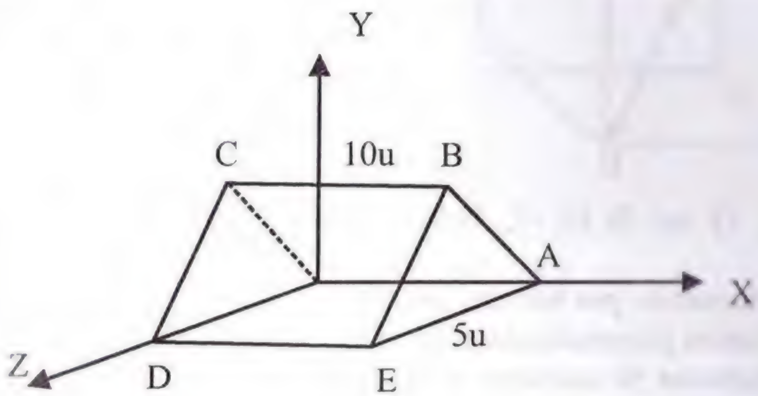
b) La proyección del vector $\vec{F}$ sobre $\overrightarrow{DC}$.



3.- En la figura, determinar:

a) El ángulo formado por los vectores $\vec{AC}$ y $\vec{EC}$.

b) El vector proyección de $\vec{OC}$ sobre $\vec{CD}$.



.- Si las longitudes del horero y del minutero de un reloj son 10 cm y 15 cm, respectivamente, determinar la posición del extremo del horero respecto al extremo del minutero, a las:

a) 3.00 h.

b) 2:30 h.

.- Un niño eleva una cometa desde un punto O en el suelo. Cuando ha desenrollado 50 metros de cuerda en dirección N 20º E y la cometa se encuentra a 30 m sobre el suelo (posición A), el niño se mueve 10 m en dirección S - E hasta un punto P. Posteriormente el viento obliga a la cometa a realizar un desplazamiento $\vec{D} = -60\vec{i} - 20\vec{j} + 40\vec{k}$ m desde la posición A hasta una nueva posición B. Determinar:

a) ¿Cuánta cuerda tiene que enrollar o desenrollar el niño para ir de O hasta P, de modo que la cometa siga en la posición A?

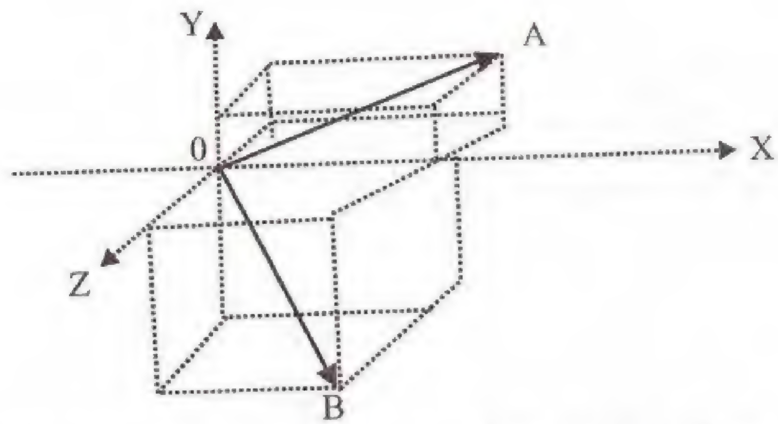
b) ¿Cuál es la altura de la cometa, sobre el suelo, cuando se encuentra en la posición B?

c) ¿Qué ángulo forman los vectores de posición de A y B, respecto al punto P?

Se tienen los vectores $\vec{A}$ de módulo 100 unidades y $\vec{B}$ de módulo 50 unidades en las direcciones que se indican en la figura. Determinar:

a) Los vectores en términos de los unitarios normalizados.

b) El ángulo formado por los dos vectores.



27.- Sean los puntos A (-2, 4, 7) m, B (0, -7, 4) m y C (1, 1, 1) m.

Determine:

a) El área del triángulo formado por los tres puntos
b) Los dos vectores unitarios perpendiculares al área.
c) Un vector cuyo módulo sea 50 unidades y sea perpendicular a la superficie del triángulo.

CINEMATICA

1. Un barco puede navegar en aguas tranquilas con una rapidez de 50 Km/h. Si el barco navega en un río cuya corriente tiene una rapidez de 4 Km/h. ¿Qué tiempo necesitará el barco para recorrer 120 Km.?

a) Aguas arriba

b) Aguas abajo

B = barco
A = agua

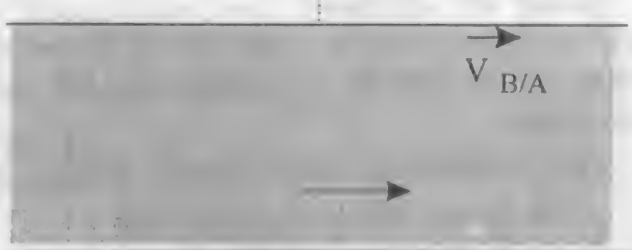
a) $V_{B/A} = 50$ km/h

$\Delta r = 120$ km

$\vec{V}_{A/T} = -4\,\vec{i}$ km/h

$\vec{V}_{B/T} = \vec{V}_{A/T} + \vec{V}_{B/A} = -4\vec{i} + 50\vec{j} = 46$ km/h

$\Delta t = \Delta r / V_{B/T} = 120$ Km / 46 Km/h = 2,6h



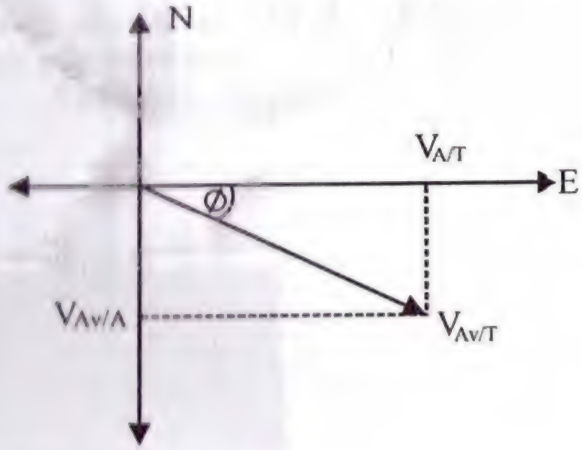
b) $\vec{V}_{A/T} = 4\,\vec{i}$ km/h

$\vec{V}_{B/T} = 54\,\vec{i}$ km/h

$\Delta t_2 = 120$ Km   54 Km/h = 2,2h

2. Un avión viaja respecto al aire hacia el sur con una rapidez de 540 Km/h, y atraviesa una corriente de aire que se mueve hacia el este a 270 Km/h Determinar:

a) ¿En qué dirección se mueve el avión con respecto a tierra?
b) ¿Cuál es la velocidad del avión con respecto a tierra?
C) ¿Qué distancia recorre (sobre la tierra) el avión en 15 minutos?



AV = avión
A = aire

$V_{AV/A} = 540$ km/h
$V_{V/T} = 270$ Km/h
$\vec{V}_{AV/T} = \vec{V}_{A/T} + \vec{V}_{AV/A}$

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{V_{AV/A}}{V_{A/T}} = \frac{540}{270} = \phi = 63{,}4^{\circ}$$

a) E 63,4° S

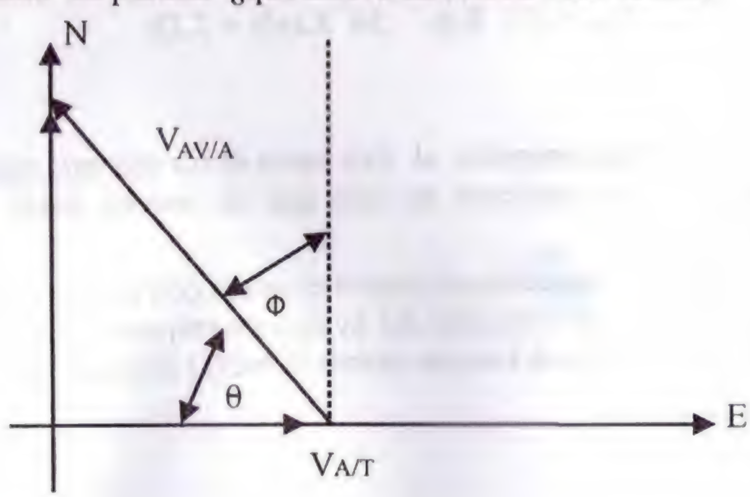
b) $V_{AV/T} = \sqrt{V^2_{AV/A} + V^2_{A/T}} = \sqrt{540^2 + 270^2} = 603{,}7$ km/h

c) $\Delta r = |\vec{V}_{AV/T}|\, t = 603{,}7$ Km/ h $0{,}25$h $= 150{,}9$ Km

3.- El piloto de un avión que vuela a una rapidez de 300 millas / h con respecto al aire, desea ir a una ciudad que está localizada 600 millas al Norte. Existe en la región un viento de 40 millas/h proveniente del Oeste Determinar:

a) ¿En qué dirección debe volar el avión ?
b) ¿Qué tiempo empleará en el viaje ?
c) Si desea regresar al punto de partida ¿qué nueva dirección debe tomar?

AV= avión
A = aire



$\Delta r =$ 600 millass
$V_{AV/A} = 300$ millas/h

$V_{A/T} = 40$ mill/h

$$\cos\theta = \frac{V_{A/T}}{V_{AV/A}} = \frac{40}{300} \Rightarrow = \theta = 82{,}3^\circ$$

$\phi = 90^\circ - 82{,}3^\circ = 7{,}7^\circ$ O

a) N 7,7º O

b) $V_{AV/T} = \sqrt{V^2_{AV/A} - V^2_{A/T}} = \sqrt{300^2 - 40^2} = 297{,}3$ millas

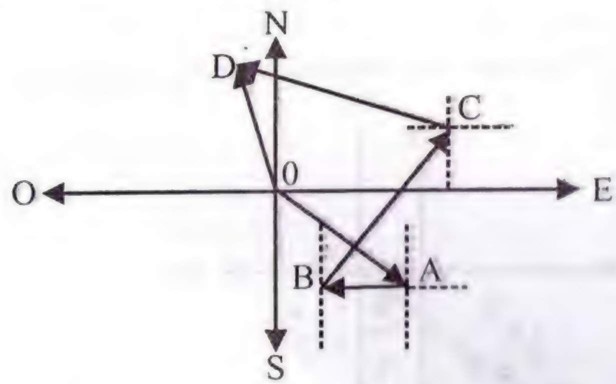
$$\Delta t = \frac{\Delta r}{V_{AV/T}} = \frac{600\text{mill}}{297{,}3\text{mill/h}} = 2{,}02 \text{ h}$$

c) $\vec{V}_{AV/T} \quad \vec{V}_{AV/A} + \vec{V}_{A/T}$

$$\text{Sen}\phi = \frac{V_{A/T}}{V_{AV/A}} = \frac{40}{300} \Rightarrow \phi = 7{,}6^\circ$$

S7,6ºE

4.- Un avión viaja 150 Km en dirección Sureste; luego 100 Km directamente hacia el Oeste; 225 Km 30º al Este del Norte y después 200 Km hacia el Noroeste Determinar la distancia y la dirección a la que se encuentra el avión de su punto de partida.



$O_{Ax} = 150.\text{Cos}45^\circ = O_{Ay} = 106{,}1$ km

$\vec{OA} = (106{,}1\vec{i} - 106{,}1\vec{j})$ Km

$\vec{OB} = (-100\,\vec{i})$ km

$$BCy = BC.\text{Cos}30^\circ = 225.\frac{\sqrt{3}}{2} = 194{,}8 \text{ km}$$

$$BCx = BC.\text{Cos}60^\circ = 225\frac{1}{2} = 112{,}5 \text{ km}$$

$\vec{BC} = (112{,}5\,\vec{i} + 194{,}8\,\vec{j})$ km

$$CDx = CDy = CD.Cos45^o = 200\frac{\sqrt{2}}{2} = 141{,}42 \text{ km}$$

$$\vec{CD} = (-141{,}42\vec{i} + 141{,}42\vec{j}) \text{ km}$$

$$\vec{\Delta r} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$$

$$= (106{,}1\vec{i} - 106{,}1\vec{j}) + (-100\vec{i}) + (112{,}5\vec{i} + 194{,}8\vec{j}) + (-141{,}4\vec{i} + 141{,}4\vec{j})$$

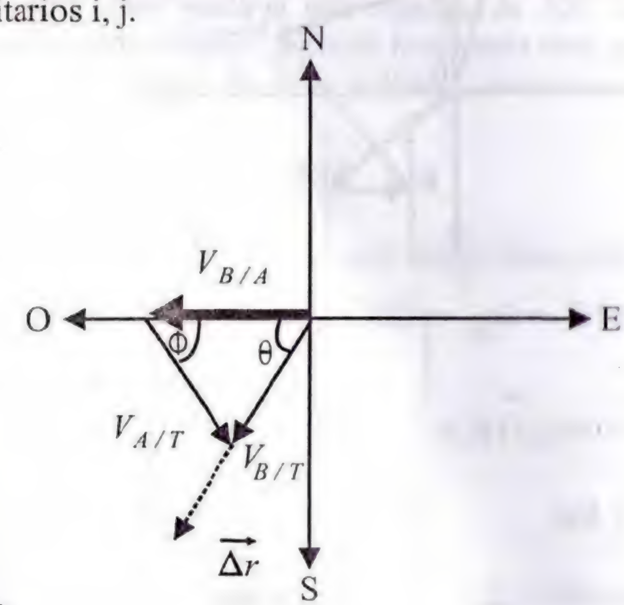
$$\vec{\Delta r} = -23{,}32\vec{i} + 230{,}12\vec{j} \text{ km}$$

$$\left|\vec{\Delta r}\right| = \sqrt{23{,}32^2 + 230{,}12^2} = 231{,}3 \text{ km}$$

$$tg\Phi = \frac{23{,}32}{230{,}12} \Rightarrow \Phi = 5{,}8^o$$

N 5,8º O ; 231,3 Km.

5.- El timonel de un barco pone su brújula hacia el Oeste, y mantiene una rapidez de 15 Km/h. Después de media hora de viaje llega a un punto situado 5 km. al Oeste y 20 Km al Sur. Determinar la velocidad y dirección de la corriente en función de los unitarios $\vec{i}, \vec{j}$.



$$V_{B/A} = 15 \text{ Km.}$$

$$\Delta r = \sqrt{5^2 + 20^2} = 20{,}61 \text{ Km}$$

$$V_{B/T} = \frac{20{,}61}{0{,}5}\frac{Km}{h} = 41{,}23 \text{ km/h}$$

$$tg\theta = \frac{20}{5} \Rightarrow \theta = 75{,}9^{o}$$

$$V_{A/T} = \sqrt{V_{B/A}^{2} + V_{B/T}^{2} - 2\,V_{B/A}.\,V_{B/T}.Cos\theta}$$

$$= 15^{2} + 41{,}23^{2} - 2(15)(41{,}23)\cos 75{,}9^{o}$$

$$= 40{,}29 \text{ Km/h}$$

$$\frac{V_{B/T}}{Sen\Phi} = \frac{V_{A/T}}{Sen\theta} \Rightarrow Sen\Phi = Sen\theta.\frac{V_{B/T}}{V_{A/T}} = Sen\ 75{,}9^{o}.\frac{41{,}23}{40{,}29} \Rightarrow \phi = 82{,}9^{o}$$

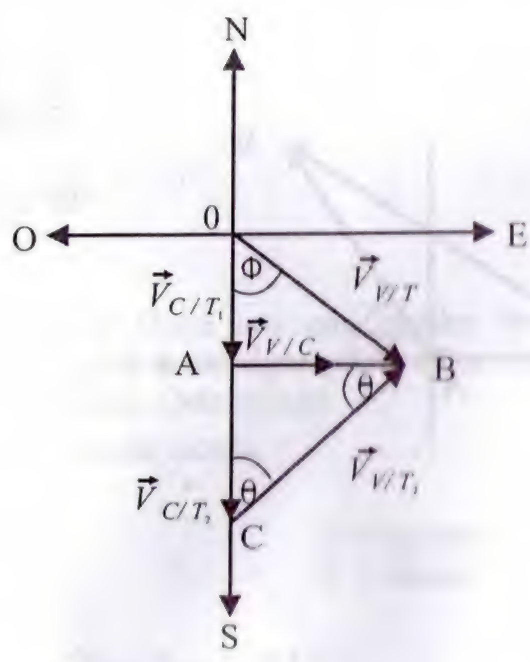
$$V_{A/Tx} = V_{A/T}.Cos\Phi = 40{,}29.Cos82{,}9^{o} = 4{,}98$$

$$V_{A/Ty} = 40{,}29.Cos7{,}1^{o} = 39{,}98$$

$$\vec{V}_{A/T} = (4{,}98\,\vec{i} - 39{,}98\,\vec{j}) \text{ Km/h.}$$

6.- Un ciclista que va hacia el Sur con una rapidez de 15 Km/h siente que el viento parece venir del Oeste; cuando aumenta su rapidez a 25 Km/h, el viento parece venir del Suroeste. Determinar la dirección y la velocidad del viento.

C = ciclista
V = viento



$$\vec{V}_{V/T} = \vec{V}_{C/T} + \vec{V}_{V/C}$$

$\Delta\ ABC$

$$\mathrm{Cos}\theta = \frac{AC}{V_{V/C_2}} \Rightarrow \frac{10}{\mathrm{Cos}45^o} = 14{,}14 = V_{V/C\,2}$$

ΔOCB

$$V_{V/T} = \sqrt{25^2 + 14.14^2 - 2(25).(14{,}14)\mathrm{Cos}45^o}$$

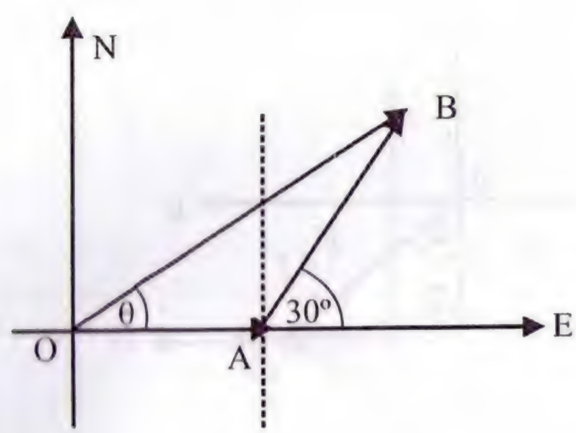
$$V_{V/T} = 18{,}03\ \mathrm{Km/h}$$

$\Delta\ AOB$

$$\mathrm{Cos}\phi = \frac{15\ \ \mathrm{Km/h}}{18{,}03\ \mathrm{Km/h}} \Rightarrow 33{,}7^o = \phi$$

$\vec{V}_{V/T} = S33{,}7\,E;\quad 18{,}03\ \mathrm{Km/h}$

7.- Un barco que va con dirección E es perseguido por un submarino que viaja en la misma dirección , cuando se encuentra a 50 millas de distancia, cambian instantáneamente de dirección. Qué rumbo debe tomar el submarino para alcanzar el barco, sabiendo que este siguió un rumbo de E 30º N. Las rapideces del barco y del submarino son respectivamente 3 millas/h y 5 millas/h. Determinar además el tiempo que se demorará en darle alcance.



B = barco
S = submarino

$V_{B/T} = 3\ \mathrm{mill/h}$

$V_{S/T} = 5\ \mathrm{mill/h}$

$OB = (V_{S/T})\ t$

$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$

$$5(\mathrm{Cos}\theta.\vec{I} + 5\mathrm{Sen}\,\theta\,\vec{j})t = 50\,\vec{i} + (3\cos 30^o\,\vec{i} + 3\mathrm{sen}30^o\,\vec{j})t$$

$(5.t\cos\theta)i + (5t \,\mathrm{Sen}\,\theta)\, j = (50 + 3\cos 30^o\, t)\, i + (3\,\mathrm{Sen}30^o\, t)\, j$

$\mathrm{Sen}\,\theta = \frac{3}{5}\mathrm{Sen}30^o \quad \theta = \quad 17{,}46$

E 17,46º N

$5t\cos\theta = 50 + 3t\cos 30^o$

$t = \frac{50 \text{ millas}}{(5\cos 17{,}46^o - 3\cos 30^o)\text{mill/h}} = 23h.$

OTRA SOLUCION

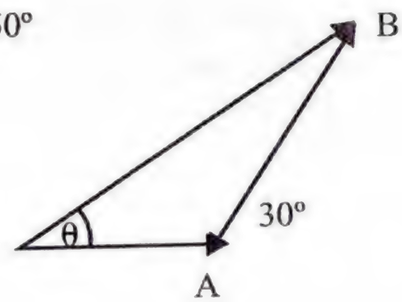
$\overrightarrow{OB} = 5t \qquad \overrightarrow{AB} = 3t$

$(5t)^2 = (50)^2 + (3t)^2 - 250.(3t)\cos 150^o$

$25t^2 = 2.500 + 9t^2 - 300.t.\cos 150^o$

$16t^2 = 259{,}8t - 2.500 = 0$

$t = 23$ h.



OB = 115 millas

AB= 69 millas

$\frac{AB}{\mathrm{Sen}\,\theta} = \frac{OB}{\mathrm{Sen}150^o}$

$\mathrm{Sen}\,\theta = \frac{AB}{OB}.\mathrm{Sen}150^o$

$\theta = 17{,}46^o$

8.- Un ciclista viaja hacia el Norte con una rapidez de 10 Km/h y el viento (que sopla a razón de 6 Km/h desde algún punto entre el Norte y el Este parece que viene de 15º al Este del Norte. Determinar:

a) La verdadera dirección del viento.

$\vec{V}_{V/T} = \vec{V}_{C/T} + \vec{V}_{V/C}$

C = ciclista

V = viento

$V_{C/T} = 10$ Km/h

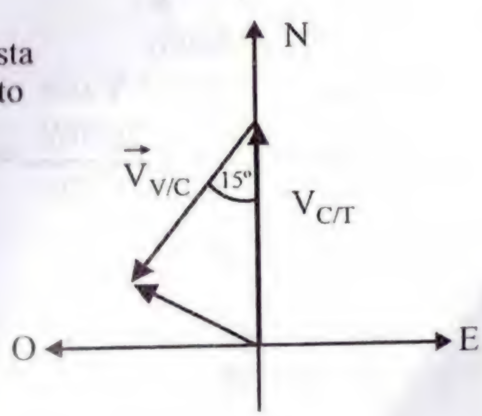
$V_{V/C} = 6$ Km/h

$V_{V/T}^2 = V^2_{C/T} + V^2_{V/C} - 2V_{V/C}.V_{C/T}.\cos 15^o$

$6^2 = 10^2 + V^2_{V/C} - 2V_{V/C}.10.\cos 15^o$

$V_{V/C} = \frac{19{,}32 \pm \sqrt{(-19{,}32)^2 - 4(64)}}{2}$

$V_{V/C} = 15{,}08$ Km/h.



$$\frac{V_{V/C}}{Sen\Phi} \quad \frac{V_{V/T}}{Sen15^{o}}$$

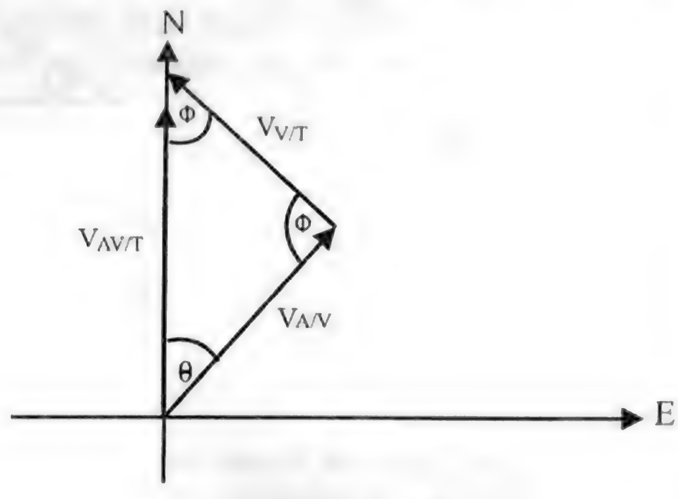
$$Sen\Phi = \frac{15,08}{6}.Sen15^{o}$$

$$\Phi = 139,68^{o}$$

9.- La rapidez de vuelo de un avión es de 270 Km/h. (respecto al aire). El avión está volando hacia el Norte , de tal forma que siempre se encuentra sobre una carretera que corre en dirección Norte-sur . Un observador de tierra informa al piloto que está soplando un viento de 140 Km/h (no indica la dirección). El piloto a pesar del viento observa que recorre una distancia de 270 Km sobre la carretera en el tiempo de una hora . Calcular:

a) La dirección en la que sopla el viento.
b) El curso del avión (dirección), esto es el ángulo entre el eje del avión y la carretera .

Av = avión
V = viento



$$V_{AV/T} = V_{AV/V} + V_{V/T}$$

$$V_{AV/V} = 270\ Km/h$$

$$V_{AV/T} = \frac{270}{1}\frac{Km/h}{h}$$

$$V_{V/T} = 140\ Km/h$$

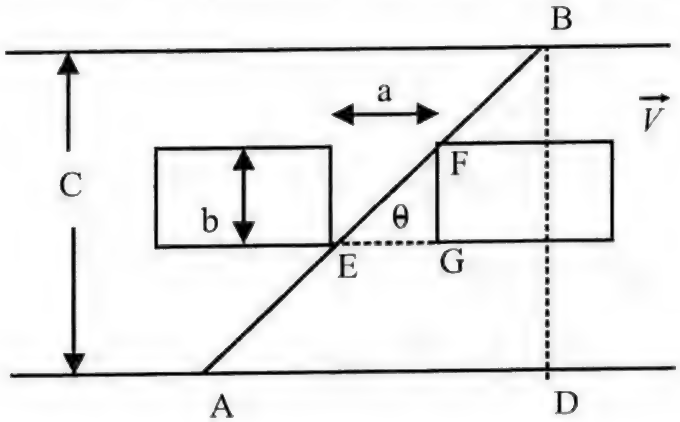
$$V^2_{V/T} = V^2_{AV/T} + V^2_{AV/V} - 2V_{AV/T}.V_{AV/V}\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{(140)^2 - 2(270)^2}{-2(270).(270)} \Rightarrow \theta = 30^{o}$$

$$2\Phi + \theta = 180^{o} \qquad \Phi = 75^{o}$$

a). N 75° O
b). N 30° E

10.- Demostrar que el tiempo necesario para cruzar en línea recta y con la mínima rapidez una calle de ancho C, por la que circulan con rapidez V automóviles de ancho b y espaciados a uno de otro es igual a:



$$t = \frac{C}{V}(a/b + b/a)$$

$$\vec{V} = \vec{V}_{A/T}$$

$$\vec{V}p = \vec{V}_{P/T}$$

$$\Delta ABD$$

$$t = \frac{\overline{AB}}{\left|\vec{V}_{P/T}\right|} \quad (1)$$

$$Sen\,\theta = \overline{BD}/\overline{AB}$$

$$\overline{AB} = \frac{c}{sen\theta} \quad (2)$$

(2) en (1)

$$t = \frac{C}{Sen\,\theta\left|\vec{V}_{P/T}\right|} \quad (4)$$

$$\vec{V}_{P/T} = \vec{V}_{A/T} + \vec{V}_{P/A}$$

$$Cos\theta = \frac{V_{P/T}}{V_{A/T}}$$

$V_{P/T} = V_{A/T} \cdot \cos\theta$ (3)

(3) en (4)

$$t = \frac{c}{\operatorname{sen}\theta V_{A/T} \cos\theta} = \frac{c}{v} \frac{1}{\operatorname{sen}\theta . \cos\theta}$$

$\triangle EFG$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{|\overrightarrow{EF}|} \qquad t = \frac{c}{V}\left(\frac{Ef^2}{ab}\right)$$

$$\text{pero } \overrightarrow{EF}^2 = a^2 + b^2$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\overrightarrow{EF}} \qquad t = \frac{c}{v}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \quad \text{lqqd}$$

11.- Tres barcos A, B, y C se mueven en trayectorias rectilíneas cruzándose uno junto de otro, en un cierto instante. Las velocidades relativas en millas/hora, de A respeto a B y de C respecto a B son:

$\vec{V}_{A/B} = 6\vec{i} - 3\vec{j}$ m/s

$\vec{V}_{C/B} = -8\vec{i} - 10\vec{j}$ m/s

Determinar la magnitud y la dirección que A parece tener para un observador situado en C.

$\vec{V}_{A/C} = \vec{V}_{A/B} - \vec{V}_{C/B}$

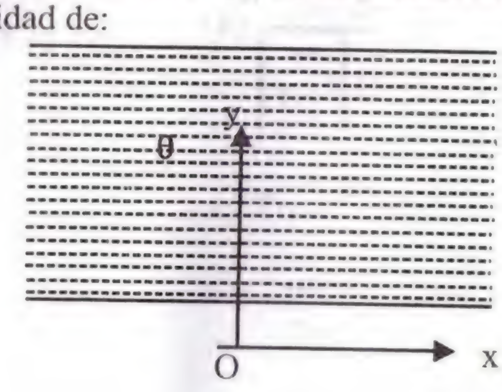
$\vec{V}_{A/C} = (6\vec{i} - 3\vec{j}) - (-8\vec{i} - 10\vec{j})$

$\vec{V}_{A/C} = 14\vec{i} + 7\vec{j}$ (millas/h)

12. Los motores de un bote lo impulsan con una velocidad de $3\vec{i} + 7\vec{j}$ m/s respecto al agua. El momento que comienza a cruzar un río de ancho 1 Km. (Punto O), un pasajero deja caer un sombrero en el agua. Calcular la posición del bote respecto al sombrero en función de los unitarios $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; un minuto más tarde, si la corriente del río lleva una velocidad de:

a) $4\vec{i}$ m/seg.

b) $-4\vec{i}$ m/seg.



$\vec{V}_{B/C} = (3\vec{i} + 7\vec{j})$ m/s

a) $\vec{V}_{C/T} = 4\,\vec{i}$ m/s

$$\vec{V}_{B/T} = \vec{V}_{B/C} + \vec{V}_{C/T}$$

$$\vec{V}_{B/T} = (3\vec{i} + 7\vec{j})\ \text{m/s} + 4\,\vec{i}\ \text{m/s} = (7\,\vec{i} + 7\,\vec{j})\ \text{m/s}$$

$$\vec{r}_{B/T} = \vec{r}_{S/T} + \vec{r}_{B/S}$$

$$\vec{r}_{B/S} = \vec{r}_{B/T} - \vec{r}_{S/T}$$

$$\vec{r}_{B/S} = \vec{V}_{B/T}.t - \vec{V}_{S/T}\ t = t(\vec{V}_{B/T} - \vec{V}_{S/T})$$

$$\vec{r}_{B/S} = 60\text{s}\left[\left(7\,\vec{i} + 7\,\vec{j}\right) - 4\,\vec{i}\right] = 60\text{s}\ \underset{v_{B/C}}{\underbrace{(3\,\vec{i} + 7\,\vec{j})}}\ \text{m/s}$$

$$= (180\,\vec{i} + 420\,\vec{j})\text{m}$$

b) $\vec{V}_{B/T} = \left[\left(3\,\vec{i} + 7\,\vec{j}\right) - 4\,\vec{i}\right]\ \text{m/s} = -\vec{i} + 7\,\vec{j}$ m/s

$$\vec{r}_{B/S} = t.\left[\left(-\vec{i} + 7\,\vec{j}\right) - (-4\,\vec{i})\right]\ \text{m/s}$$

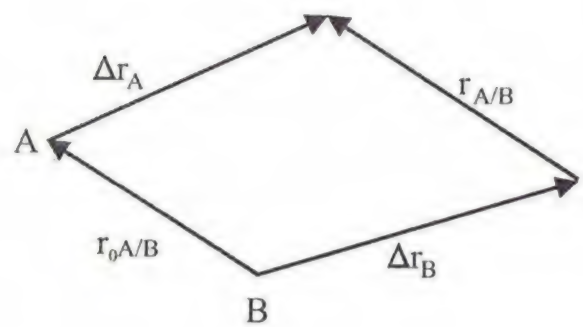
$$r_{B/S} = 60\text{s}\frac{\left(3\,\vec{i} + 7\,\vec{j}\right)}{\vec{V}_{B/C}}\ \text{m/s}$$

$$r_{B/S} = (180\vec{i} + 420\,\vec{j})\text{m}$$

La posición relativa depende solamente de la velocidad relativa:

$$\vec{r}_{B/S} = \vec{r}_{B/C}(t) = 60\,(3\,\vec{i} + 7\,\vec{j}) = 180\,\vec{i} + 420\,\vec{j}\ \text{m}$$

1.- Una partícula A empieza a moverse con aceleración constante e igual a $(2\vec{i} - \vec{k})$ m/s² en el instante en que su posición respecto a otra partícula B es $(\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k})$m. La partícula B se mueve con velocidad constante de $(\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k})$ m/seg. Determinar después de que tiempo t(s) $\vec{r}_{A/B}$ será:



$(13\vec{i} - 12\vec{j} - 2\vec{k})$ m.

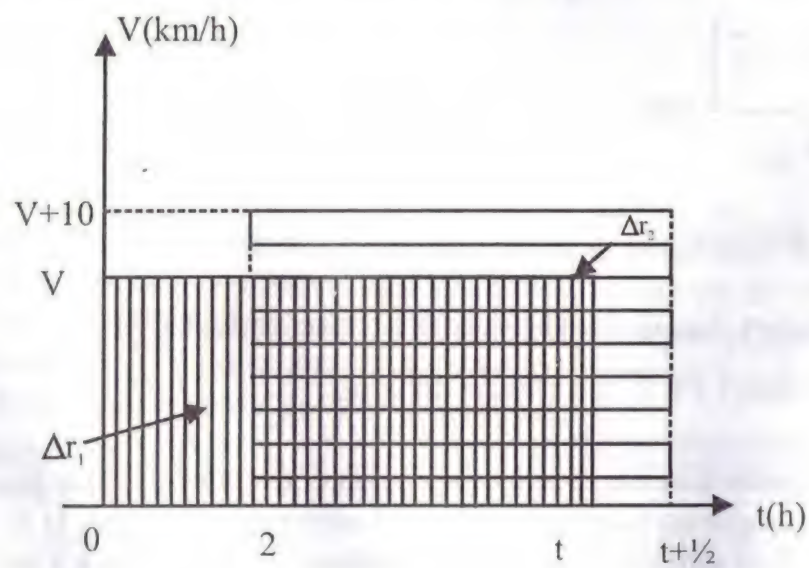
$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_{O\ A/B} + \Delta\vec{r}_A - \Delta\vec{r}_B$

$(13\vec{i} - 12\vec{j} - 2\vec{k}) = (\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}) + \frac{1}{2}(2\vec{i} - \vec{k}).t^2 - (\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}).T$

$13\vec{i} - 12\vec{j} - 2\vec{k} = (1+t^2 - t)\vec{i} + (4 - 4t)\vec{j} + (2 - 0{,}5t^2 - t)\vec{k} - 12)4 - 4t$

$t = 4\ (s)$

14.- La distancia entre los puntos A y B es de 480 Km. Un automóvil sale de A hacia B y dos horas después sale de A un segundo automóvil para hacer el mismo viaje. El segundo automóvil mantiene una rapidez de 10 km/h mayor que el primer automóvil. Determinar la rapidez de cada automóvil.



$\Delta r_1 = \Delta r_2$

$\Delta r_1 = V_1 \bullet t = 840\ Km.$

$\Delta r_1 = V_1 \bullet t = 840\ Km.$

$$T=\frac{840}{V}$$

$$\Delta r_2 = V_2 \bullet \left(t+\frac{1}{2}-2\right)$$

$$\Delta r_2 = (V+10) \bullet (t-1{,}5) = 840 \ (2)$$

(1) en (2)

$$V^2 + 10v - 5600 = 0$$

$$V = 70(Km/h)$$

$$V_1 = 70(Km/h)$$

$$V_2 = 80(Km/h)$$

15.- Un automóvil recorrió la primera mitad del camino con una velocidad constante de 80 Km/h y la segunda mitad con una velocidad de 40 $\vec{i}$ Km/h. Determinar la velocidad media del automóvil.

$$V_1 = 80(Km/h)$$

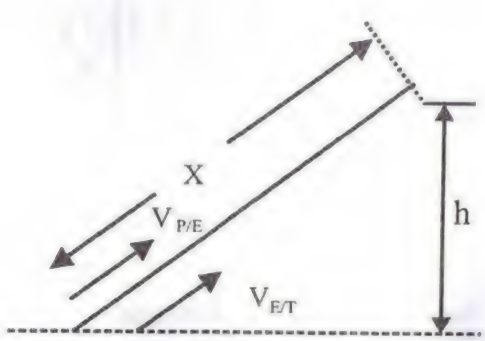
$$V_2 = 40(Km/h)$$

V = velocidad media

$$\vec{V} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{V} = \left(\frac{2x}{x/80 + x/40}\right)\vec{i} = 53{,}3 \ Km/h$$

16.- Si una persona esta quieta sobre una escalera mecánica en movimiento, sube en 60 segundos. Cuando la escalera esta sin funcionar la persona sube en 90 segundos. Qué tiempo se tardará en subir a la planta alta cuando la persona y la escalera están en movimient?



$$V_{P/E} = x/90$$

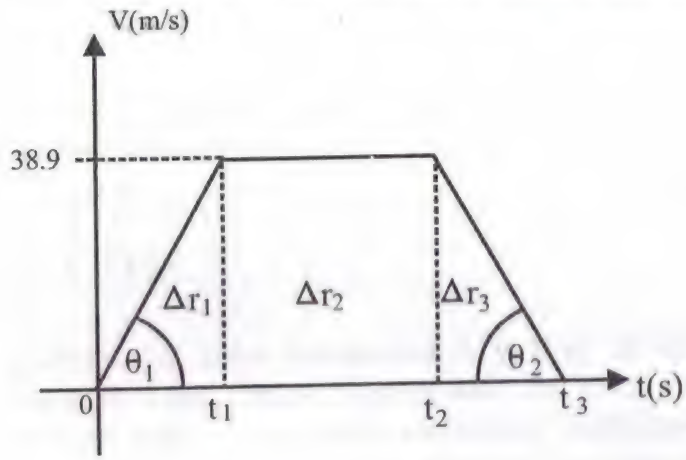
$$V_{E/T} = x/60$$

$V_{P/T} = V_{E/T} + V_{P/E}$

$V_{P/T} = (x/90 + x/60)\ m/s$

$$V = \frac{x}{V_{P/T}} = \frac{x\,m}{(x/90 + x/60)m/s} = 36\ s$$

17.- Un tren acelera partiendo del reposo a razón de 1.8 m/s ^{2} hasta alcanzar una máxima rapidez de 140 Km/h. Después de recorrer a esta rapidez durante un cierto tiempo, frena a razón de 1.2 m/s ^{2} hasta detenerse; si el espacio total recorrido es 5 Km. Determinar el tiempo que estuvo el tren en movimiento.



$$\Delta r_{Tot} = \Delta r_1 + \Delta r_2 + \Delta r_3 = 5000m$$

(1) $$5000 = \left(\frac{38{,}9\ t_1}{2}\right) + 38{,}9(t_2 - t_1) + \left(\frac{38{,}9\ (t_3 - t_2)}{2}\right)$$

pero primer tramo :

$38{,}9 = 0 + 1{,}8 - t_1$ $\qquad$ $t_1 = 21{,}6$ s $\quad$ (2)

tercer tramo :

$0 = 38{,}9\ 1{,}2\ (t - t_2)$ $\qquad$ $t - t_2 = 32{,}4$ s (3)

(2) y (3) en (1)

$2(38{,}9)\bullet(t_2 - 21{,}6) = 7899{,}4$

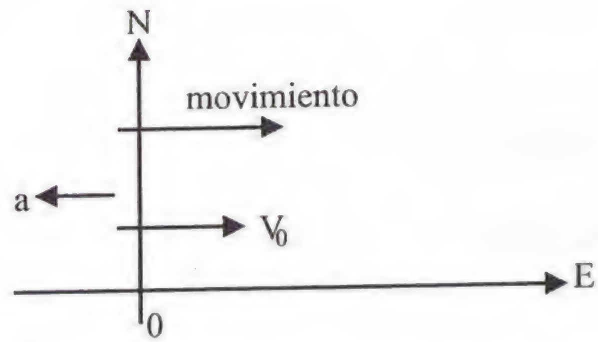
$t_2 = 123{,}1$ s

pero $\quad t_3 - t_2 = 32{,}4\ s$ $\qquad$ $t_3 = 155{,}5\ s$

18.- Puede una partícula moverse hacia el Este si tiene una aceleración hacia el Oeste, si la velocidad inicial es:

a) Si No igual a cero. Explique.

b) Si No es mayor a cero. Explique

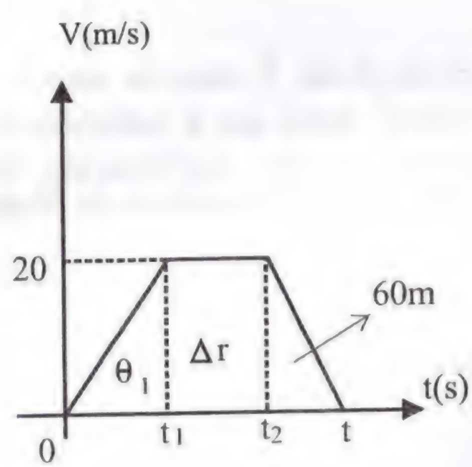


a). Vo=0, No, porque la aceleración lleva a la partícula al Oeste.
b). Vo > 0. Si, la partícula irá al Este hasta que su velocidad sea a igual 0, y luego regresa al Oeste.

19.- Un automóvil parte del reposo desde un punto A y acelera a razón de 1 m/s^2 hasta alcanzar una velocidad de 72 i km/h, continúa moviéndose con esta velocidad hasta un momento en que frena, parándose en un punto B, situado 60 metros más allá del punto en que aplicó los frenos. Si se conoce que la rapidez media del automóvil en el trayecto de A a B es 54 km/h. Determinar:

a) El tiempo que tarda en ir de A a B
b) La distancia entre A y B

$\text{tg}\,\theta_1 = 1\ \text{m/s}^2$



72 km/h = 20 m/s
V = 54 km/h = 15 m/s

$20\ m/s = V_o + a\ .\ t_1$

$t_1 = 20\ s$

$\Delta r_1 = (20\ s\ 20 m/s\ )\ /\ 2 = 200\ m$

$V_F^{\ 2} = V_o^{\ 2} + 2\ .\ a\ .\ x$

$a = -(20\ m/s)^2\ /\ 2\ (60)\ m = -\ 3{,}33\ m/s^2$

$V = V_o + a.(t - t_2)$

$(t - t_2) = (-20\ m/s\ )\ /\ -3{,}33\ m/s^2 = 6\ s$

$V = (\ 200 + \Delta r + 60\ )\ m\ /\ (\ 20 + (\Delta r/20 + 6\ )\ s\ =\ 15\ m/s$ $\qquad \Delta r = 520\ m$

$(t_2 - t_1) = (520\ m\ )\ /\ 20\ m/s = 26\ s$ $\qquad t_2 = 26 + 20 = 46 s$

a) pero: $t - t_2 = 6s$ $\qquad t\ = 52\ s$

b) $\Delta r_{total} = 200 + \Delta r + 60 = 780\ m$

).- Una partícula pasa por un punto P cualquiera y se mueve con una rapidez constante de 4Km/h; Después de una hora vuelve al mismo punto P. Determinar:

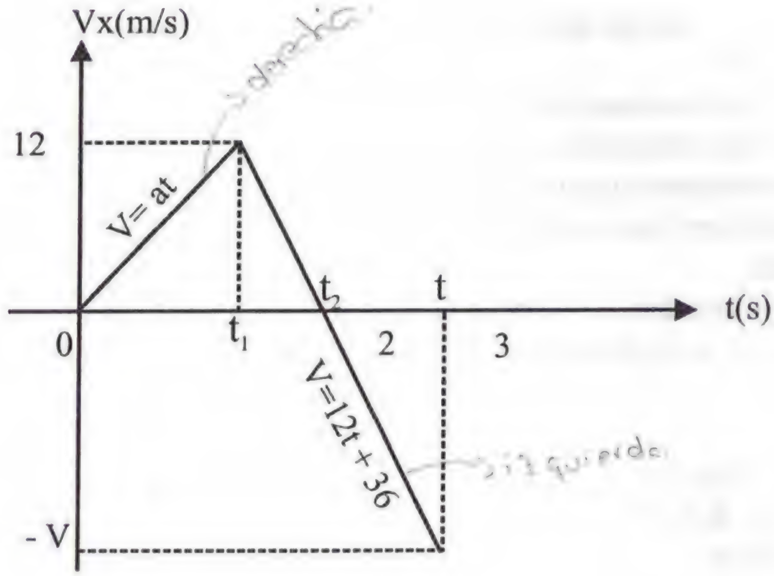
a) La velocidad media de la partícula.
b) El espacio recorrido

(a) $V = \dfrac{\Delta r}{\Delta t} \quad V = \dfrac{0}{\Delta t} = 0\ \dfrac{m}{s}$

(b) $e\ = V\ .\ t = 4\ Km\ .\ 1 = 4\ Km$

- Una partícula se mueve sobre el eje de las X hacia la derecha partiendo del reposo, con una aceleración de 6 m/s^2, hasta que la velocidad es de 12 $\vec{i}$ m/s. En ese instante se le somete a una aceleración de 12 m/s^2, hacia la izquierda, hasta que la distancia total recorrida es de 36 m. Determinar:

a) El tiempo total transcurrido.
b) La rapidez media.
c) La velocidad media
d) Construir el gráfico velocidad-tiempo



a) $6 = \dfrac{12}{t_1}$ $\qquad t_1 = 2$ s

$12 = \dfrac{12}{t_2 - t_1}$

$t_2 - 2 = 1$

$t_2 = 3$ s

$36 = \dfrac{12 \times 3}{2} + \dfrac{(t-3)\,.\,V}{2}$

$36 = 18 + (t\text{-}3) \cdot \dfrac{(t-3)\,.\,12}{2}$

$36 = 18 + (t\text{-}3)^2 \cdot 6$

$t = 4{,}735$

b) $\vec{V} = \dfrac{36}{4{,}73}\,\dfrac{m}{s}$

$\vec{V} = 7{,}61$ m/s

c) $\vec{V}m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

$\vec{V}m = \dfrac{18\,\vec{i} + \dfrac{(1{,}73)\,(-\,20{,}76\,\vec{i})}{2}}{4{,}73}$

$\vec{V}m = 0\,\vec{i}$ m/s

Un submarino parte de un muelle que está ubicado, respecto a un faro, en el punto (300, -20, -20) m. El submarino se sumerge (partiendo del reposo), en dirección Sureste, con un ángulo de depresión de 37º moviéndose en línea recta; alcanzando una rapidez de 36 km/h en 20 s con aceleración constante.

A partir de este punto se dirige hacia el Oeste con una velocidad constante durante 10 s. Determinar:

a) El desplazamiento del submarino
b) La posición final del submarino respecto al faro
c) La aceleración constante durante el descenso
d) La velocidad media en función de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
e) La rapidez media.
f) El vector unitario paralelo al vector desplazamiento
g) Los gráficos v - t y a - t para todo el recorrido

a) $x = SQ = Vo \cdot t + (½).at^2$
$SQ = 0{,}5 \cdot 0{,}5\,(20)^2$
$SQ = 100$ m

$SM = SQ \cdot \text{Cos } 37° = 100 \cdot \text{Cos } 37° = 79{,}86$ m
$SQ_X = SQ\,z = S\,M.\text{Cos } 45° = 56{,}46$ m
$SQ_Y = MQ = SQ \cdot \text{Sen } 37° = 100 \cdot \text{Sen } 37° = 60{,}18$ m

$\overrightarrow{SQ} = 56{,}46\,\vec{i} - 60{,}18\,\vec{j} + 56{,}46\,\vec{k}$ m
$QR = V \cdot t = 10$ m/s . 10 s
$QR = 100$ m $\qquad \overrightarrow{QR} = -\,100\,\vec{i}$ m
$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{QR}$
$\overrightarrow{SR} = (56{,}46 - 100)\,\vec{i} - 60{,}18\,\vec{j} + 56{,}46\,\vec{k}$ m
$\overrightarrow{SR} = -43{,}54\,\vec{i} - 60{,}18\,\vec{j} + 56{,}46\,\vec{k}$ m
$SR = 93{,}30$ m

b) $\overrightarrow{FR} = \overrightarrow{FS} + \overrightarrow{SR}$
$\overrightarrow{FS} = (300\,\vec{i} - 20\,\vec{j} - 20\,\vec{k}) + (-43{,}5\,\vec{i} - 60\,\vec{j} + 56{,}46\,\vec{k})$
$\overrightarrow{FS} = 256{,}46\,\vec{i} - 80{,}18\,\vec{j} + 36{,}46\,\vec{k}$ m
$FR = 271{,}16$ m

c) $\vec{V} = a \cdot u_a = a \cdot u_y = a \cdot U_{SQ}$
$\vec{a} = 0{,}5\,(56{,}46\,\vec{i} - 60{,}18\,\vec{j} + 56{,}46\,\vec{k}\,)/\,100$
$\vec{a} = 0{,}282\,\vec{i} - 0{,}300\,\vec{j} + 0{,}282\,\vec{k}$

d) $\vec{V}_m = SR/\Delta\,t$

$\vec{V}_m = (-43{,}54\ \vec{i} - 60{,}18\ \vec{j} + 56{,}46\ \vec{k}) / (20 + 10)$

$\vec{V}_m = -1{,}45\ \vec{i} - 2{,}005\ \vec{j} + 1{,}88\ \vec{k}$ m/s

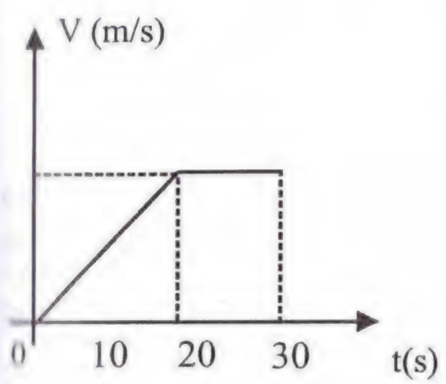
e) $V = (SQ + QR) / \Delta t$

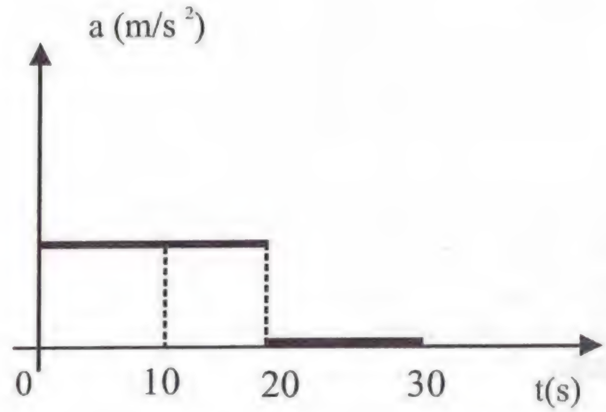
$V = (100 + 100) / 30 = 6{,}67$ (m/s)

f) $\vec{u}_{S/R} = \overrightarrow{SR}/SR$

$\vec{u}_{S/R} = (-43{,}54\ \vec{i} - 60{,}18\ \vec{j} + 56{,}46\ \vec{k}) / 93{,}30$

$\vec{u}_{S/R} = -0{,}467\ \vec{i} - 0{,}645\ \vec{j} + 0{,}605\ \vec{k}$)

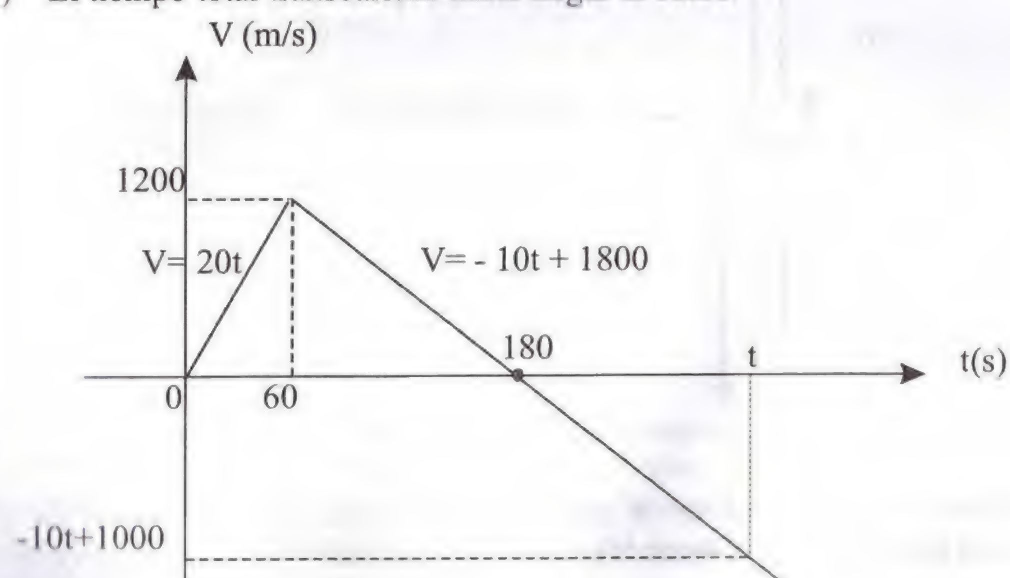




23.- Un cohete parte del reposo, con una aceleración vertical de 20 m/s^2 que actúa constantemente durante 1 minuto. En ese instante se agota el combustible y sigue subiendo como una partícula libre. Determinar:

a) La máxima altura que alcanza el cohete.

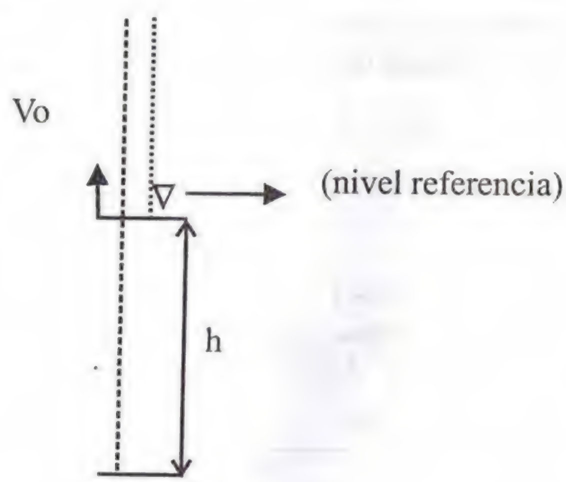
b) El tiempo total transcurrido hasta llegar al suelo.



$V = 20\,t$; $V = 20 \,.\, 60 = 1200$ (m/s)
$V = -10t + b$
$1200 = -10\,t + b$; $t = 60$; $V = 1200$ m/s
$1200 = -10\,(60) + b$
$b = 1800$
$V = -10\,t + 1800$, $V = 0$ m/s
$t = 180$ (s)
$H_{max} = ½ \,.\, 60 = 1200 + ½\,(180 - 60) \,.\, 1200$
$H_{max} = 108000$ m $= 108$ km
b) $-108000 = ½\,(t - 180) \,.\, (-10t + 1800)$
$t^2 - 360\,t + 10800 = 0$
$t_1 = 33{,}03$ (s) (absurdo)
$t_2 = 326{,}96$ (s) (solución)

24.- Se deja caer una piedra desde un globo que se eleva con una velocidad constante de $10\,\vec{j}$ m/s. Si la piedra tarda 10 s. En llegar al suelo. ¿A que altura estaba el globo al momento en que se dejó caer la piedra? Si la velocidad inicial es de 10 m/s para el nivel de referencia dado:

$Y = Vot - ½(gt^2)$
$Y = 10$ m/s $.\, 10$ s $- 0{,}5 \,.\, 10$ m/s^2 $.\, (100$ s$^2)$
$Y = -400$ m

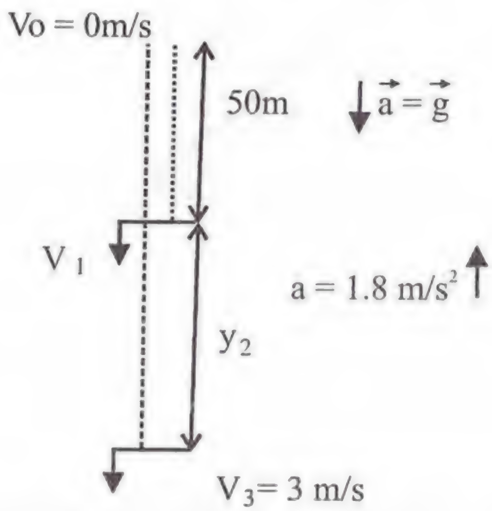


25.- Un paracaidista se deja caer desde un helicóptero que está suspendido en el aire y cae 50 m sin fricción, en este instante se abre el paracaídas y su movimiento se retarda.

uniformemente a razón de 1,8 m/seg^2, finalmente llega al suelo con una rapidez de 3 m/s . Determinar:

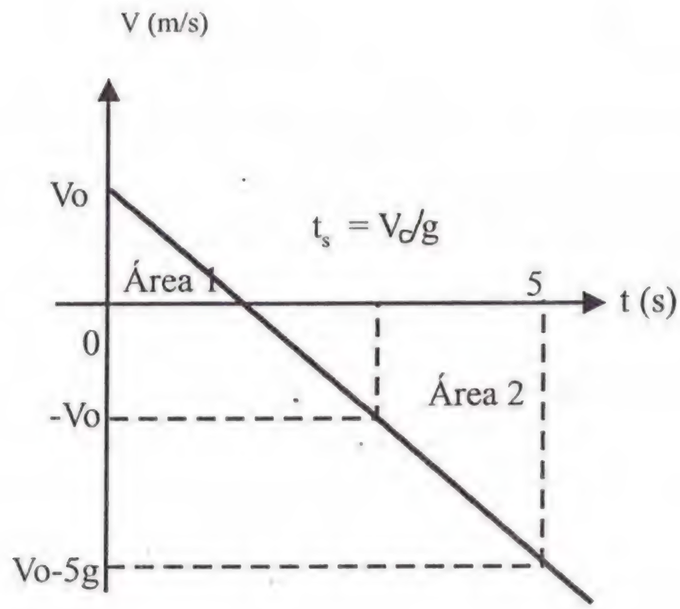
a) El tiempo que estuvo el paracaidista en el aire.
b) La altura a la que estaba el helicóptero el momento del salto.

primer tramo : $V_1^2 = V_0^2 + 2\,gy$



$V_1^2 = 2\,(-10)\ m/s^2 \,.\, 50m$
$V_1 = -\ 31{,}6\ m/s$
$V_1 = Vo + g\ .\ t_1$
$-31{,}6\ m/s = 0 -\ 10\ m/s^2\ .\ t_1$
$t_1\ = 3{,}16\ s$
segundo tramo.
$-3m/s = -\ 31{,}6\ m/s + 1{,}8\ m/s^2\ .\ t_2$
$t_2\ = 15{,}9\ s$
$y\ = Vo.\ \ t_2 + \frac{1}{2}a\ .\ (t_2)^2$
$y\ = -31{,}6\ m/s\ (15{,}9\ s) + \frac{1}{2}\ (1{,}8\ m/s^2)\ (15{,}9\ s\ )^2\ = -\ 274{,}9\ m$
$t = t_1 + t_2 = 19{,}06\ s$
$y_{TOTAL} = -\ 324{,}9\ m$

26.- Una pelota es arrojada verticalmente hacia arriba desde un punto próximo a la cornisa de un elevado edificio. La pelota salva justamente la cornisa en su descenso y pasa por un punto situado a 40 m por debajo del de partida, 5 segundos después de haber abandonado la mano del lanzador. Determinar, la velocidad inicial con la que fue lanzada la pelota.



La suma algebraica de las áreas en el gráfico representa el valor de la componente del vector desplazamiento.

Area1+ Area2 = -40m

$$\frac{1}{2}.Vo.\ \frac{Vo}{g}+\frac{1}{2}\left(5-\frac{Vo}{g}\right).(Vo-5g)=40$$

Vo = 17 m/s

Otra forma

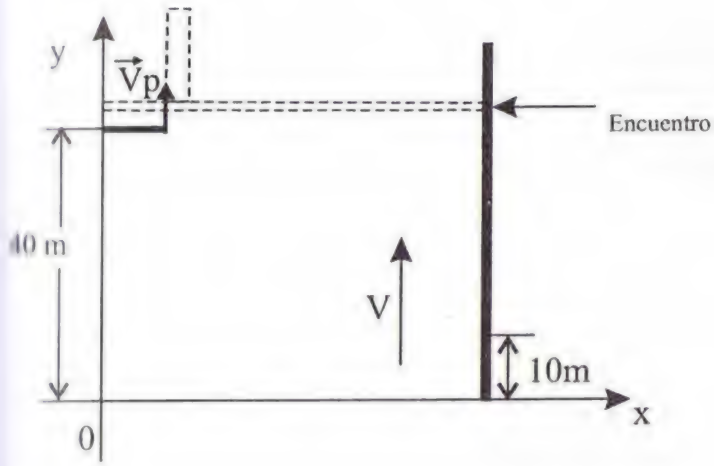
$$-40 = Vo\,(5) - \frac{1}{2}(10)\,.\,25$$

$$-40 = 5Vo - 125$$

Vo = 17 m/s

27.- Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde una altura de 40 m. Por el pozo de un ascensor, con una rapidez inicial de 50 m/s. En el mismo instante la plataforma del ascensor situada a una altura de 10 m. Se mueve hacia arriba con una rapidez constante de 5 m/s. Determinar:

a) Cuándo se encontrara la pelota con la plataforma?
b) Dónde ocurre el encuentro?
c) El espacio recorrido por la pelota
d) El vector desplazamiento de la pelota en función de los unitarios $\vec{i}, \vec{j}$.
e) La velocidad relativa de la pelota respecto a la plataforma cuando se produce el encuentro.



Posición final = Posición Inicial + Desplazamiento

$\vec{Po}_p = 40\vec{J}$; $\vec{Vo}_p = 50\vec{J}$ m/s ; $\vec{V}_A = 5\vec{J}$ m/s ; $\vec{Po}_A = 10\vec{J}$m

pelota y ascensor se encontrarán cuando tengan la misma posición

$\vec{P}_p = \vec{P}_A$

$\vec{Po}_p + \vec{\Delta r}p = \vec{Po}_A + \vec{\Delta r}_A$

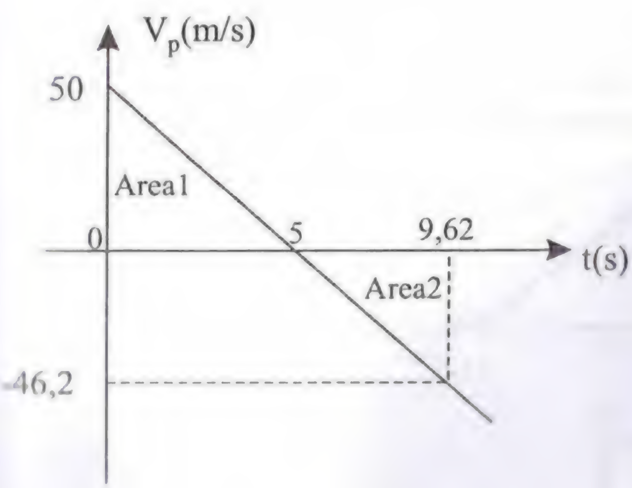
$\vec{\Delta r}_p = \vec{Vo}_p \bullet t + (½) \bullet \vec{g} \bullet t^2$; $\vec{g} = -10\vec{J}$ (m/s^2)

$\vec{\Delta r}_A = \vec{V}_A \bullet t$

$(40\vec{j}) + (50j) \bullet t - (1/2) \bullet 10\vec{j} \cdot t^2 = (10\vec{j}) + (5\vec{j} \bullet t)$

t = 9,62s

b) $\vec{P}_A = \vec{P}_p = 58{,}2\bar{j}$ (m)



c) Espacio recorrido = sumatoria aritmética de las áreas (Areas consideradas positivas) = Espacio recorrido = Area 1 + Area 2
= 231,7 m.

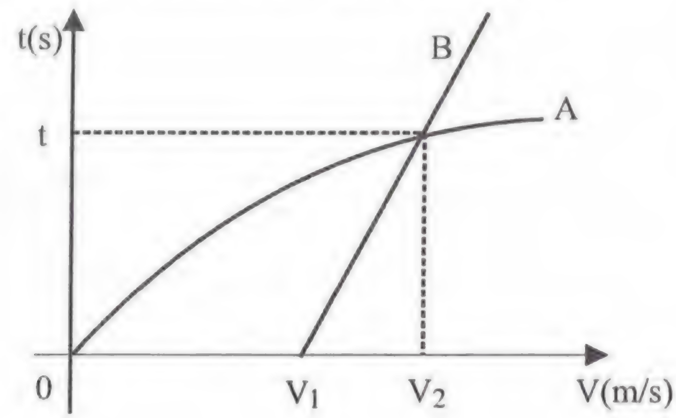
d) Desplazamiento = Suma algebraica de las áreas.

$$\overrightarrow{\Delta r_P} = 18{,}27\,\vec{j}\ m.$$

e) $\vec{V}_{p/A} = \vec{V}_p - \vec{V}_A = -51{,}2\,\vec{j}\ m/s$

28.- Dos autos se mueven de acuerdo al siguiente gráfico.

a) ¿Cuál es la aceleración de B?
b) ¿Cuál recorre mayor espacio en el tiempo t_1?
c) ¿Qué tipo de movimiento tiene cada vehículo?



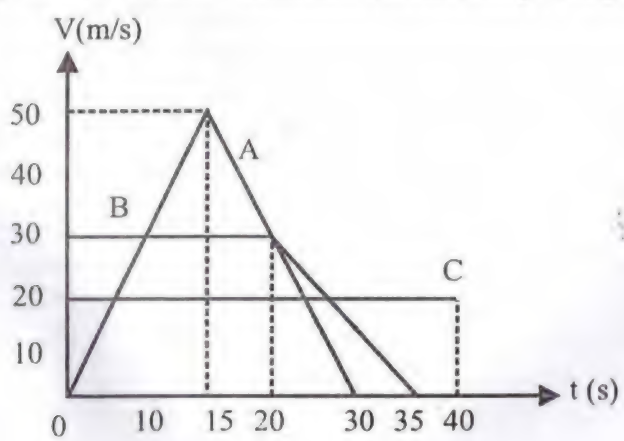
a) $a_B = \dfrac{V_2 - V_1}{t_1}$

b) El mayor espacio es recorrido por B (mayor área)

c) B tiene un movimiento Rectilíneo Uniforme Variado
A tiene un movimiento variado.

29.- Tres vehículos A, B, y C se mueven a lo largo de una línea recta y partir de la misma posición inicial, de acuerdo al gráfico v - t.

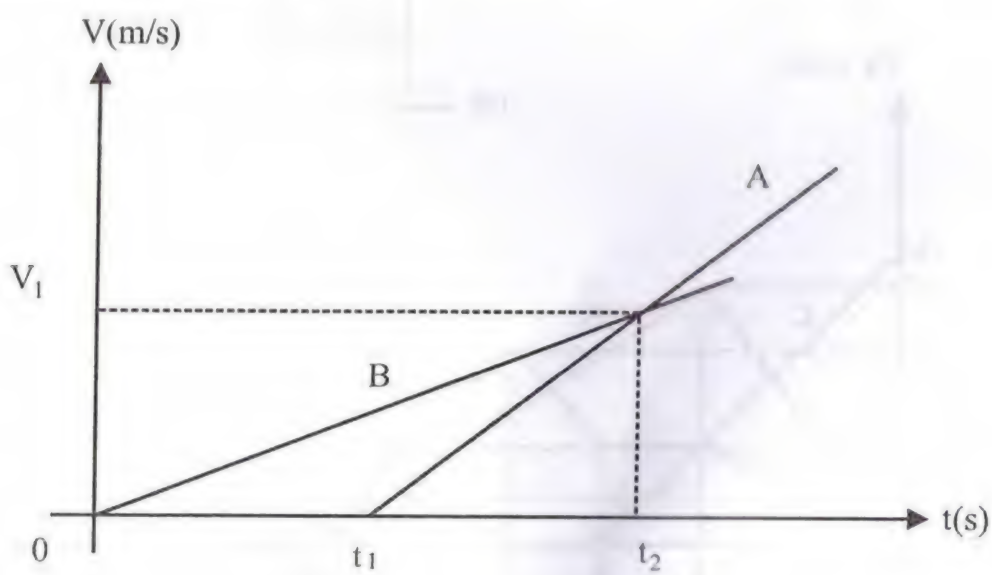
a) Describa el tipo de movimiento de cada vehículo
b) ¿Cual de los tres vehículos recorre mayor espacio?



a) Vehículo A:
$0 \leq t \leq 15$ Movimiento rectilíneo uniforme acelerado.
$0 < t \leq 30$ Movimiento rectilíneo uniforme retardado
Vehículo B:
$0 \leq t \leq 20$ Movimiento rectilíneo uniforme (+).
$20 < t \leq t \quad 30$ Movimiento rectilíneo uniforme retardado.
Vehículo C:
$0 \leq t \leq 40$ Movimiento rectilíneo uniforme.

b) Vehículo A:
$$\left(\frac{1}{2}\right) \bullet 50 \bullet 15 + \left(\frac{1}{2}\right) \bullet 50 \bullet (30 - 15) = 750\ m.$$
Vehículo B:
$$30 \bullet 20 + \frac{1}{2} \bullet (35 - 20) \bullet 30 = 825\ m$$
Vehículo C:
$$20 \bullet 40 = 800 \text{ m}$$
B recorre mayor distancia.

30.- El diagrama v - t , de la figura representa el movimiento de dos partículas a lo largo de una línea recta y que parten de una misma posición inicial desde el reposo.Si los tiempos $t_1 = 2$ s y $t_2 = 4$ s ; al cabo de que tiempo que partió el primero le alcanzará el segundo.



Si las partículas se alcanzan entonces sus desplazamientos tienen que ser iguales.

t = tiempo en el cual B intercepta a A.

$\Delta r_A = \Delta r_B$

$0.5t \,.\, (V/4)t = 0.5\,(t-2)\,V\,(t-2)/4$

desarrollando tenemos,

$t^2 / 16 = (t^2 - 8t + 4)/2$

$t^2 = 2t^2 - 8t + 8$

$t^2 - 8t + 8 = 0$

$t = 6.82$ s

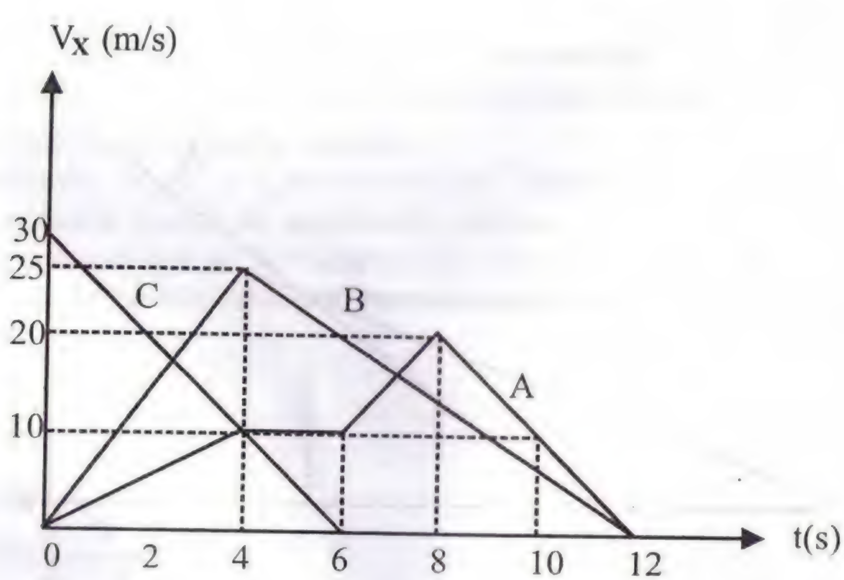
31.- El movimiento de tres carros A, B y C en una carretera recta esta representado en un gráfico V_x- t , de la figura. Si los tres carros están juntos para un tiempo t = 0 (s).

a) Describir el movimiento de cada uno de los vehículos.

b) Realice los gráficos r_x - t y a_x- t de cada vehículo.

c) ¿Cuál es la distancia que recorre cada vehículo y cual es la distancia entre cada uno de ellos?

d) El vector velocidad media de cada uno.

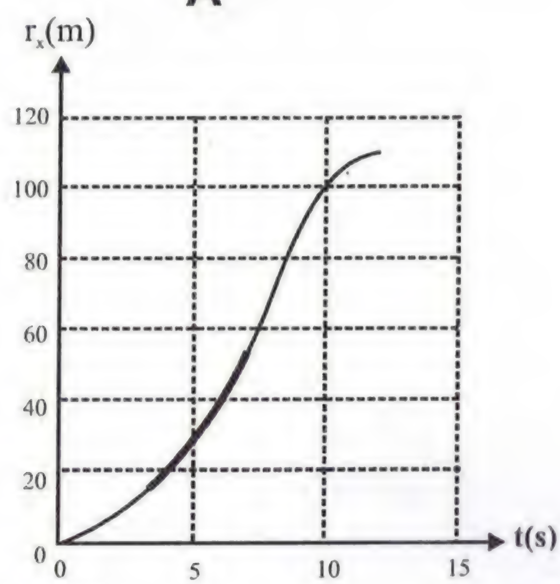


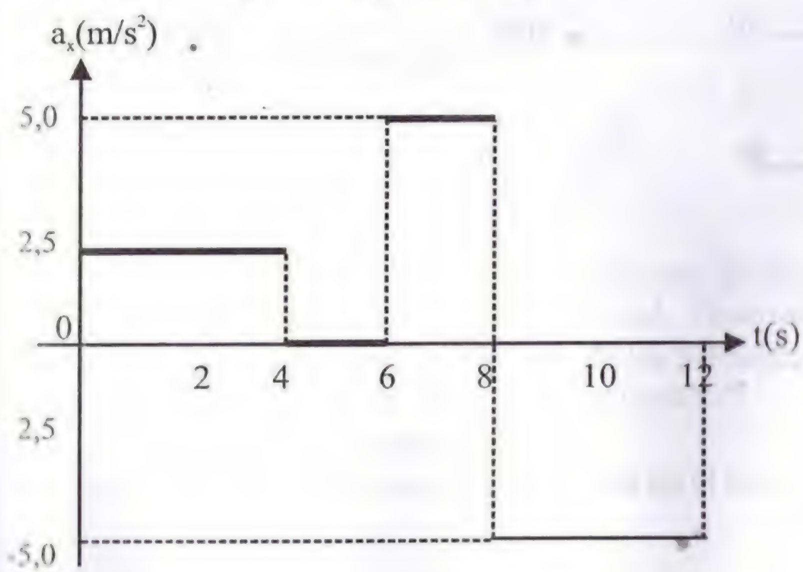
a) Vehículo A
MRUV acelerado (+)
MRU (+)
MRUV acelerado (+)
MRUV retardado (+)

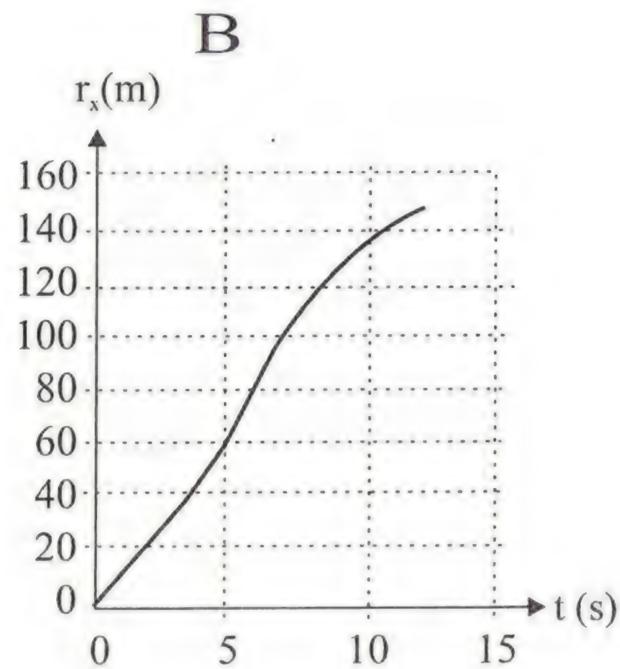
Vehículo B
MRUV acelerado (+)
MRUV retardado (+)

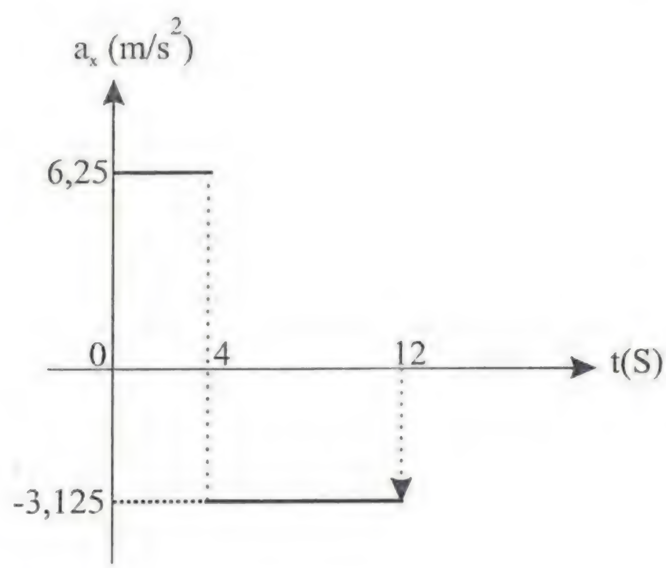
Vehículo C
MRUV retardado (+)

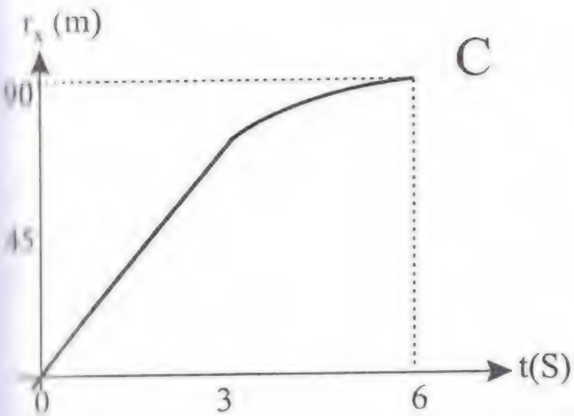
A

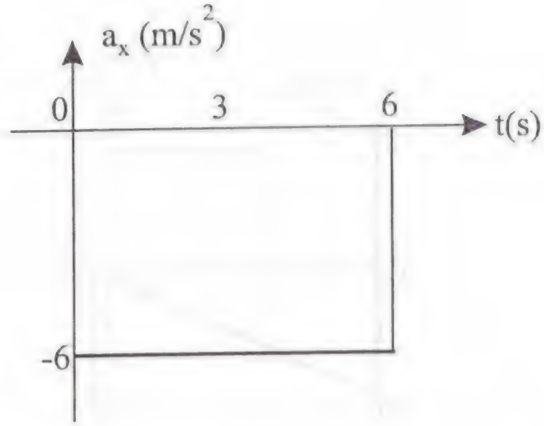





B
r_x(m)
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
5
10
15
t (s)


a_x (m/s^2)
6,25
0
4
12
t(S)
-3,125





c) Todas las distancias son positivas.

Vehículo A. (½).(4).10 + (6 - 4). 10 + (½).(8 - 6).(20 - 10) + (½) .(12 - 8).20

$\Delta \vec{r}_A = 110\,\vec{i}$ m

Vehículo B: (½).4.(25) + (½) .(12 - 4). 25

$\Delta \vec{r}_B = 150\,\vec{i}$ m

Vehículo C: (½).6.(90)

$\Delta \vec{r}_C = 90\,\vec{i}$ m

$d_{AC} = 110 - 90 = 20$ m

$d_{AB} = 150 - 90 = 60$ m

$d_{CB} = 150 - 90 = 60$ m

d) Vehículo A

$$\vec{V} = \frac{\Delta r_A}{\Delta t} = \frac{110\vec{i}}{12} = 9{,}17\vec{i}\ (m/s)$$

Vehículo B

$$\vec{V} = \frac{\Delta r_B}{\Delta t} = \frac{150\vec{i}}{12} = 12{,}5\vec{i}\ (m/s)$$

Vehículo C

$$\vec{V} = \frac{\Delta r_C}{t} = \frac{90\vec{i}}{6} = 15\vec{i}(m/s)$$

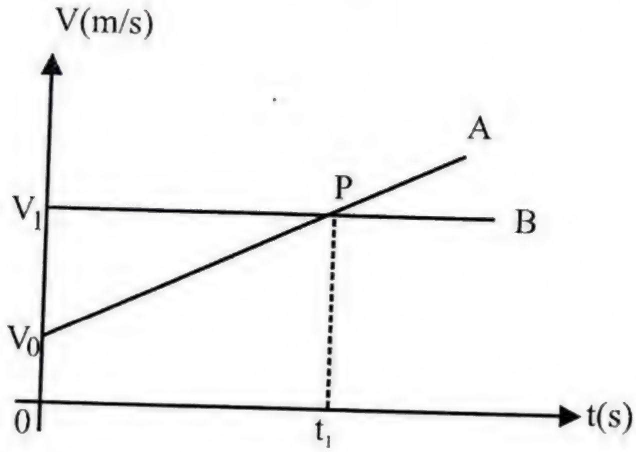
12.- La figura representa los gráficos V - t , para dos partículas A y B que se mueven en línea recta desde la misma posición inicial. Determinar:

a) El tipo de movimiento de cada una de las partículas.

b) Para un tiempo $t = t_1$ s ¿Qué indica el punto P?.

c) La aceleración para cada partícula.

d) La velocidad media para cada partícula en el intervalo de 0 a t_1 s.



a) Partícula A:
Movimiento rectilíneo uniforme acelerado (+)
Partícula B:
Movimiento rectilíneo uniforme (+)

b) En el tiempo t_1; A y B tienen la misma velocidad

c) Partícula A.

$$a = \frac{V_1 - V_0}{t_1}$$

Partícula B:
a = 0 porque tiene velocidad constante

d) $e_A = V_0 \cdot (t_1) + (½).(V_1 - V_0) \cdot t_1$

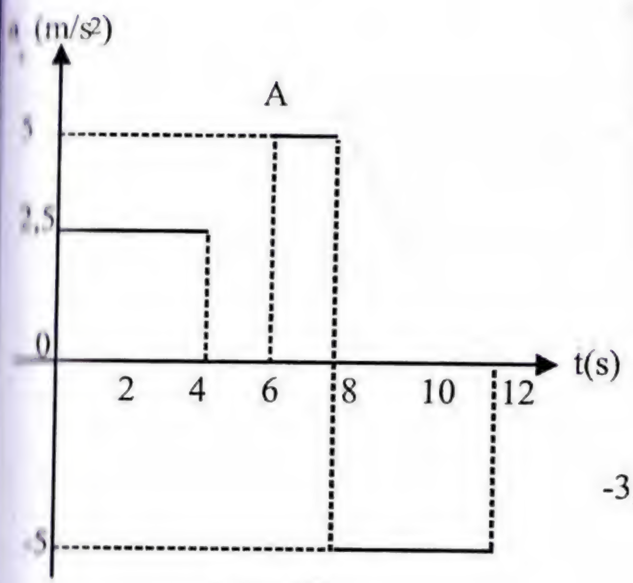
$$V = \frac{e_A}{t_1} = V_0 + \frac{1}{2}(V_1 - V_0)$$

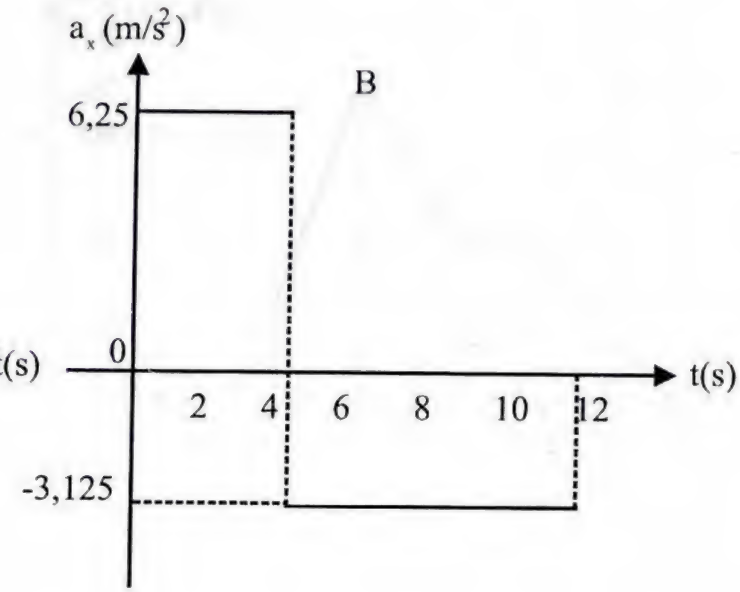
$$V = \frac{1}{2}(V_0 + V_1)$$

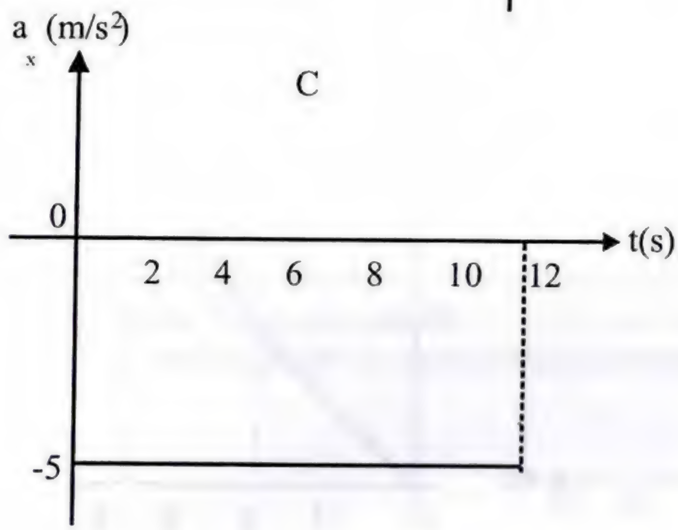
Partícula B la V media es igual a V_1

33.- El movimiento de tres carros a lo largo de una carretera recta esta representado por las figuras a_x - t. Si los tres carros (A, B y C) están juntos para el instante t = 0 y parten del reposo.

a) Describir el movimiento de cada uno de los vehículos.
b) Realice los gráficos r_x - t, V_x - t de los vehículos.
c) ¿Cuál es la velocidad media de cada uno?







Carro A:

a) M.R.U.V. acelerado (+) 0 s→4 s
   M.R.U.(+) 4 s→6 s
   M.R.U.V. acelerado (+) 6 s→8 s
   M.R.U.V. retardado (+) 8 s→12 s

Carro B:

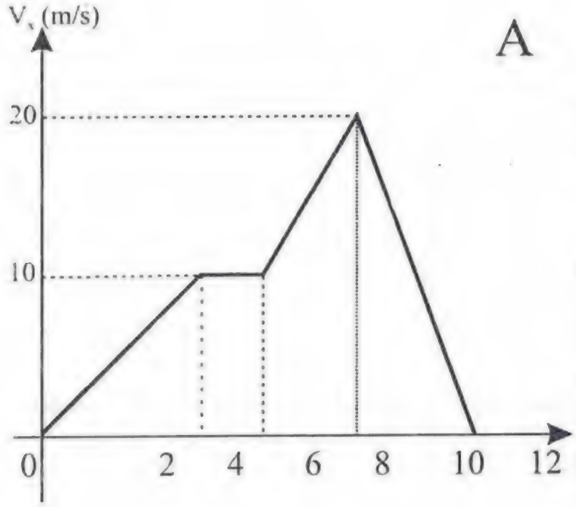
M,.R.U.V. acelerado (+) 0 s→4 s
M.R.U.V. retardado (+) 4 s→12 s

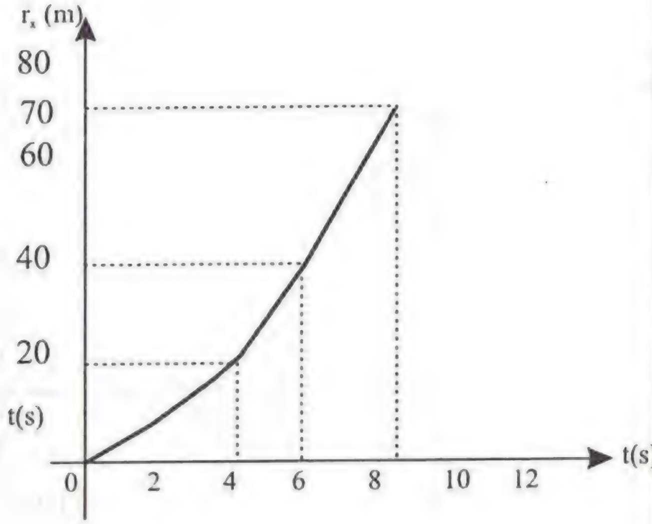
Carro C:

M.R.U.V. acelerado (+) 0 s→12 s

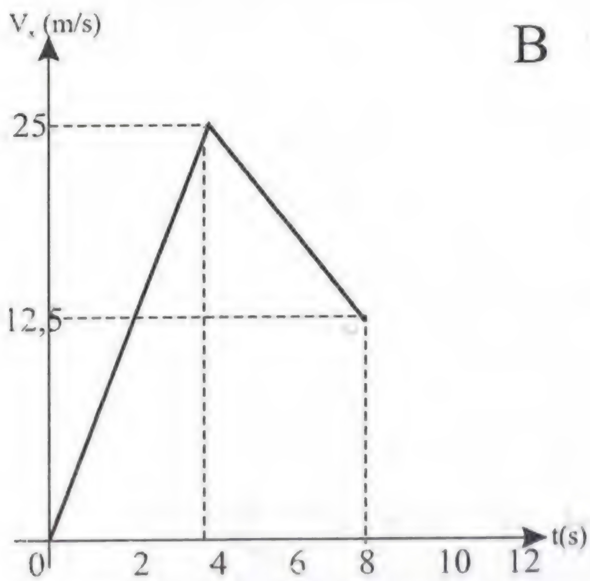
b)

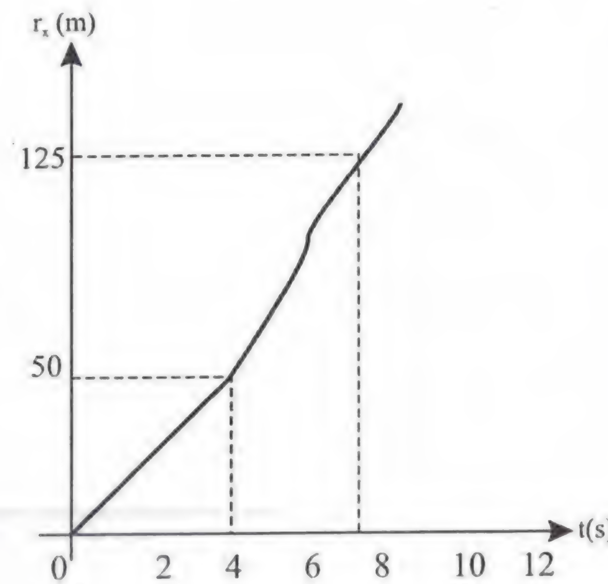
A


V$_x$ (m/s)
20
10
t(s)
0 2 4 6 8 10 12

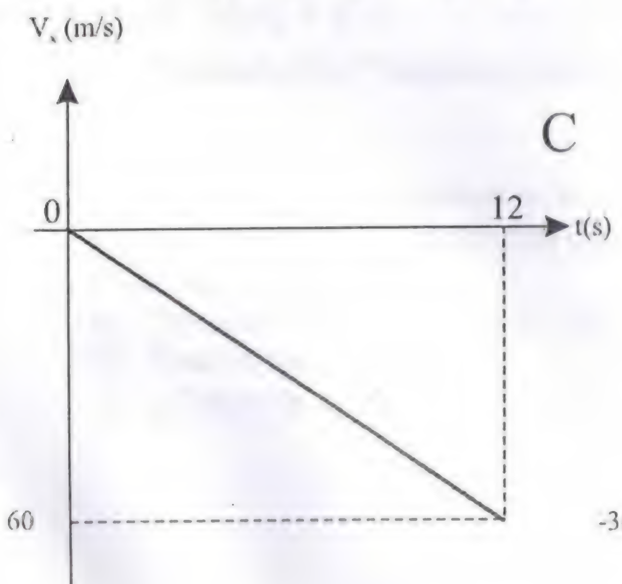

r$_x$ (m)
80
70
60
40
20
t(s)
0 2 4 6 8 10 12

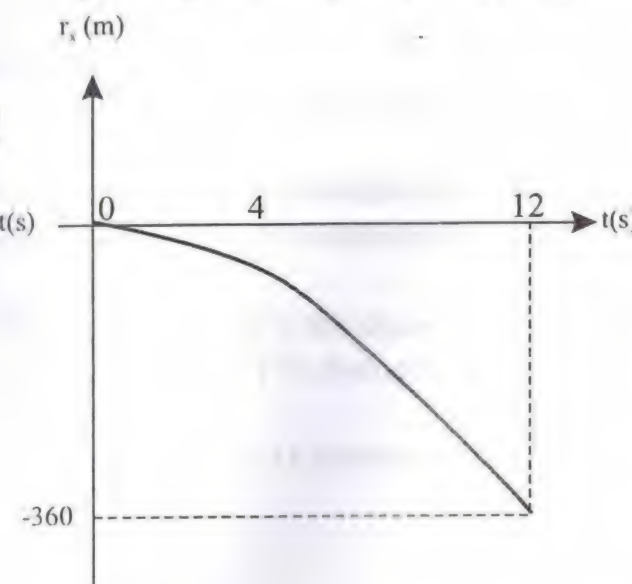
B


V$_x$ (m/s)
25
12,5
t(s)
0 2 4 6 8 10 12


r$_x$ (m)
125
50
t(s)
0 2 4 6 8 10 12

C


V$_x$ (m/s)
0
12
t(s)
60


r$_x$ (m)
0
4
12
t(s)
-360

c) Distancia A:

$(\frac{1}{2})4.10+(6-4).\ 10+(8-6).\ 10+(\frac{1}{2}).(8-6).(20-10)+(\frac{1}{2}).(12-8).20=110m$

Distancia B:

$(\frac{1}{2}).4{,}25+(\frac{1}{2}).(8-4).(25-12{,}5)+(8-4)12{,}5=125m$

Distancia C:

$(\frac{1}{2}).12.(-60)=360m$

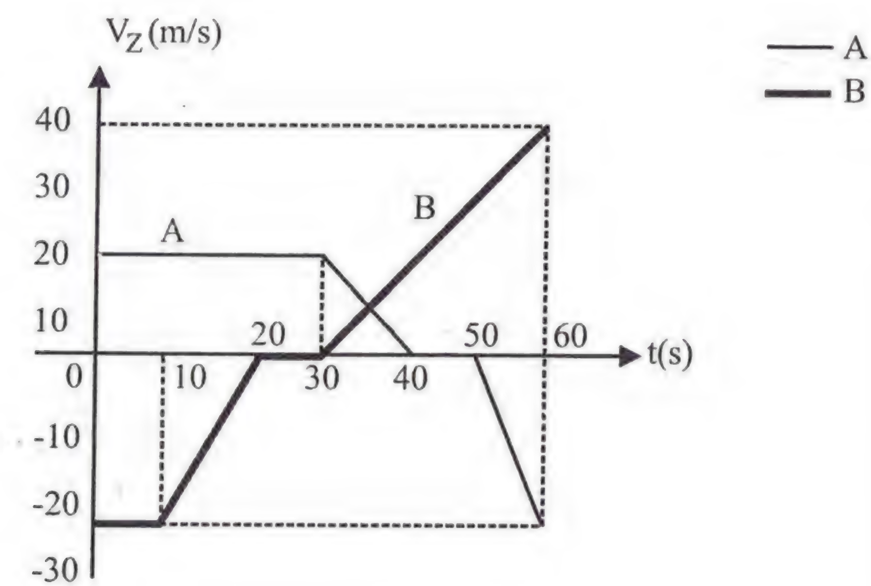
$$\overrightarrow{V\,m_A}=\frac{\Delta\vec{r}_A}{\Delta t}=\frac{110\,\vec{i}}{12}=9{,}16\,\vec{i}\ m/s$$

$$\overrightarrow{V\,m_B}=\frac{\Delta\vec{r}_B}{\Delta t}=\frac{125\,\vec{i}}{8}=15{,}62\,\vec{i}\ m/s$$

$$\overrightarrow{V\,m_C}=\frac{\Delta\vec{r}_C}{\Delta t}=\frac{-360\,\vec{i}}{12}=-30\,\vec{i}\ m/s$$

34.- La figura representa los gráficos velocidad - tiempo (V - t) de dos partículas. A y B, que se mueven en línea recta (z) a partir de una misma posición inicial.

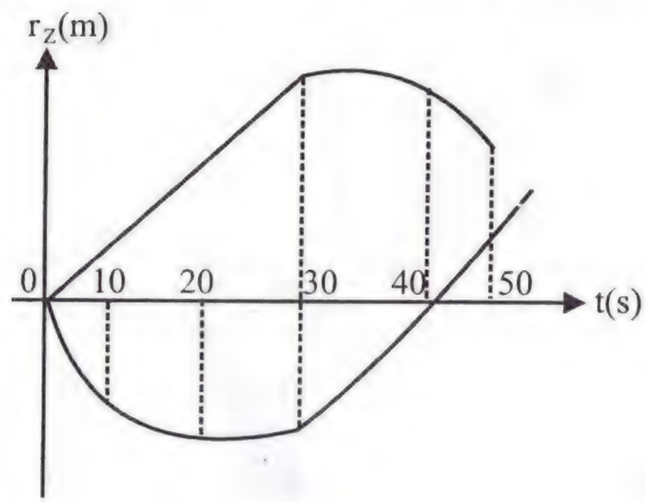
a) Describa el tipo de movimiento de las partículas en cada intervalo de tiempo.
b) Dibuje, en forma ligera, los gráficos $r_z = f(t)$ para las dos partículas.
c) Determine la rapidez media de cada partícula en todo el recorrido.



a) Partícula A
MRU (+)
MRUV retardado (+)
Reposo
MRUV acelerado (-)

Partícula B
MRU (-)
MRUV retardado (-)
Reposo
MRUV acelerado (-)

b)



c) $\overline{V} = \dfrac{e}{\Delta t}$

e = espacio total recorrido
Δt = tiempo empleado

Partícula A:

$$e = 20.30 + \tfrac{1}{2}(40 - 30).20 + (60 - 50).20 = 700\ (m) \qquad \Delta t = 60\ (s)$$

$$V_A = 700 / 60 = 11{,}67 (m/s)$$

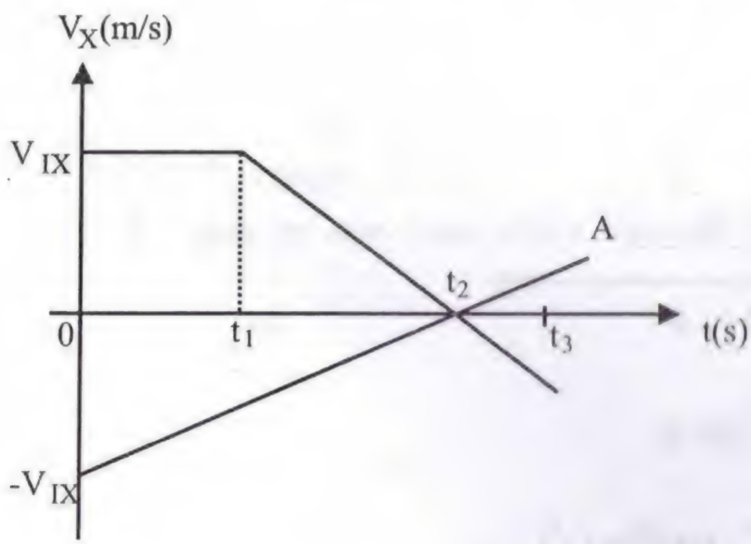
Partícula B:

$$e = 10.20 + \tfrac{1}{2}(20 - 10).20 + \tfrac{1}{2}(60 - 30).40 = 900 (m) \qquad \Delta t = 60\ (s)$$

$$V_B = 900 / 60 = 15 (m/s)$$

35.- Las partículas A y B se mueven de acuerdo al siguiente gráfico V_X t, a lo largo de una trayectoria rectilínea y parten a t = 0(s) desde la misma posición. Determinar:

a) El tipo de movimiento de cada partícula.
b) La velocidad relativa de A respecto a B al tiempo $t = t_2$.
c) Si las partículas se volverán a encontrar. Justifique su respuesta.



a) Partícula A

$0 \rightarrow t_2$ MRUV Retardado (-)

$t_2 \rightarrow t$ MRUV acelerado(+)

Partícula B $0 \rightarrow t_1$ MRU (+)

$t_1 \rightarrow t_2$ M.R.U.V. retardado (+)

$t_2 \rightarrow t_3$ M.R.U.V. acelerado (-)

b) $\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$, para $t = t_2$

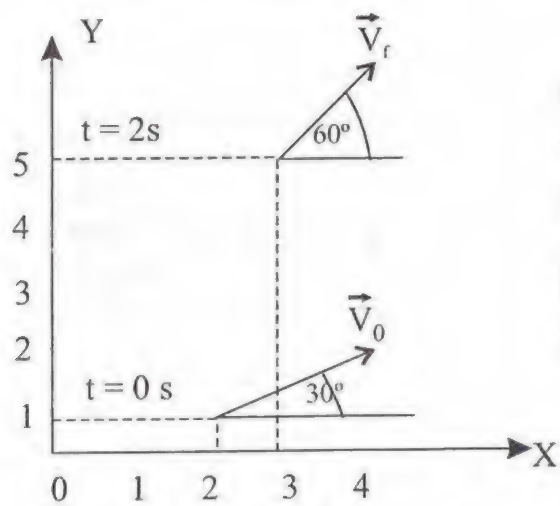
$V_A = 0$ $\qquad V_B = 0$ $\qquad V_{A/B} = 0 - 0$

$\vec{V}_{A/B} = 0$

c) Si, hasta $t = t_2$ la partícula A se desplaza hacia la izquierda y la B hacia la derecha, alejándose entre sí, pero a partir de t_2 A se mueve hacia la derecha y B hacia la izquierda, entonces es lógico que en algún instante las partículas se encuentren.

36.- A un tiempo $t = 0$ una partícula se encuentra en el punto de coordenadas (2; 1) m y tiene una rapidez de 10 m/s, formando un ángulo de 30º con la horizontal. Calcular:

a) La velocidad media.
b) La aceleración media.



$Vo = 10 (m/s)$; $\quad \vec{V}o = 8,67\vec{i} + 5\vec{j} (m/s)$

$Vf = 18 (km/s) = 5 (m/s)$

$\vec{V}f = 2,5\vec{i} + 4,33\vec{j} (m/s)$

$\vec{r}_o = 2\vec{i} + \vec{j} (m)$

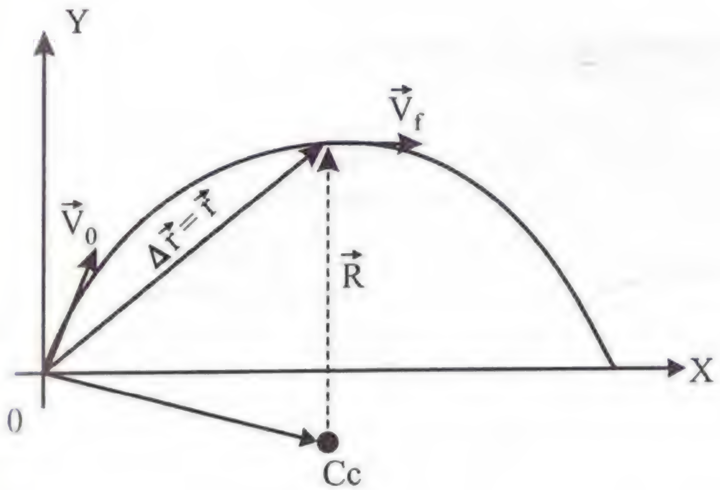
$\vec{r}_f = 3\vec{i} + 5\vec{j} (m)$

a) $\vec{V}m = \dfrac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = 0,5\vec{i} + 2\vec{j} (m/s)$

b) $\vec{a}_m = \dfrac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t} = -3,08\vec{i} - 0,33\vec{j} (m/s^2)$

37.- Se lanza un proyectil con una velocidad inicial $\vec{V}o = 10\vec{i} + 5\vec{j}$ (m / s). En cierto instante su velocidad es $\vec{V} = 10\vec{i} + 0\vec{j}$ (m / s) . Determinar, para ese instante.

a) El vector posición respecto al punto de lanzamiento
b) El vector aceleración tangencial
c) El vector aceleración normal
d) El vector posición del centro de curvatura respecto al punto de lanzamiento.



a) $V_{fy} = V_{0y} - gt$ pero $V_{fy} = 0$

$$t = \frac{V_{0y}}{g} = \frac{5(m/s)}{10(m/s^2)} = 0{,}5s$$

$$y = V_{0y}.t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 1{,}25(m)$$

$$x = V_{0x}.t = 5(m)$$

$$\vec{r} = 5\vec{i} + 1{,}25\vec{j} \ \ m$$

b) $\vec{g} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$, pero en este caso (altura máxima) $\vec{a}_T \perp \vec{g}$, de donde:

$$\vec{a}_T = 0i + 0\,j = \hat{0} \ \ m/s^2$$

c) $\vec{g} = \vec{a}_N = -10\,\vec{j}(m/s^2)$

d) $R = \dfrac{V^2}{a_N} = \dfrac{(10^2 + 0^2)}{10} = 10(m)$

$$\vec{R} = 10\vec{j}\,(m)$$

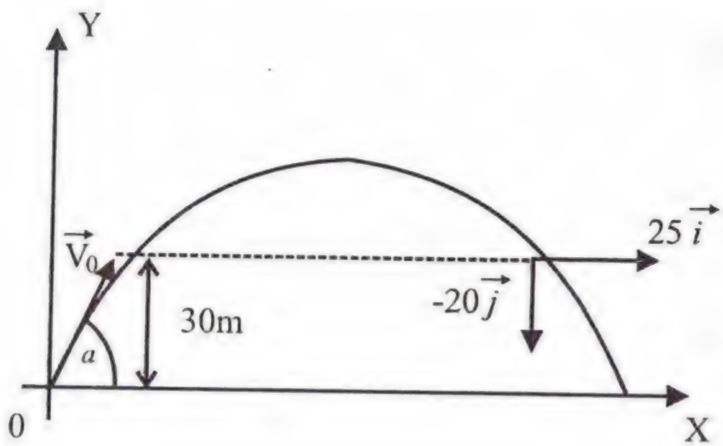
$$\vec{r}_{CC/0} = \vec{r} - \vec{R}$$

$$\vec{r}_{CC/0} = 5\vec{i} - 8{,}75\,\vec{j}(m)$$

[illegible].- Se lanza al aire una pelota desde el suelo. Cuando la pelota se encuentra a una altura de 30 metros se observa que su velocidad es $\vec{V} = 5\vec{i} - 20\vec{j}(m/s)$. Determinar:

a) La altura máxima de la pelota
b) La distancia horizontal que recorrerá la pelota hasta llegar al nivel del lanzamiento.

c) La velocidad de la pelota en el instante de llegar al suelo.



$V_{fy}^2 = V_{0y}^2 - 2ghy$

$V_{0y}^2 = (-20^2) + 2 .\ 10\ m/s^2 .\ 30\ m = 1000\ m^2/s^2$

$V_0 \cos\alpha = 25 \qquad (1)$

$V_0\ \text{sen}\alpha = 10 .\ \sqrt{10}\ m/s \qquad (2)$

$\frac{(1)}{(2)} = \frac{V_0\ \text{sen}\,\alpha}{V_0\ \cos\alpha} \Rightarrow \alpha = 51{,}67^{\circ}$

a) $V_{fy}^2 = V_{0y}^2 - 2g.y_{max}\ y_{max} = \frac{1000\ m^2/s^2}{20\ m/s^2}$

$y_{max} = 50\ m$

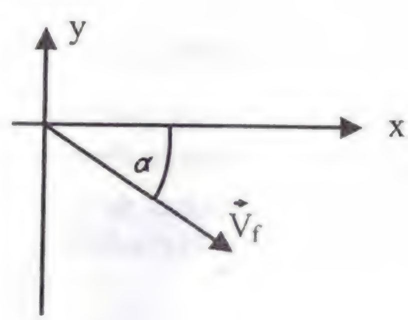
b) $x = \frac{V_0^2\ \text{sen}\ 2\alpha}{g} = 158\ m$

c) $V_0 = \frac{25}{\cos\alpha} = 40{,}3 \qquad \vec{V}_0 = (25\vec{i} + 10\sqrt{10}\vec{j})\ m/s$

$\vec{V}_f = (25\vec{i} - 10\sqrt{10}\vec{j})\ m/s$

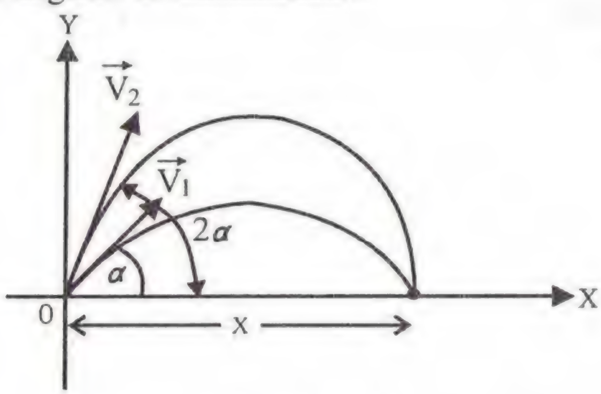
$\left|\vec{V}_f\right| = 40{,}3\ m/s$

$\alpha = -51{,}67^{\circ}$



39.-Desde un cierto punto de un terreno horizontal se disparan dos proyectiles e el mismo instante, el primero con inclinación α y velocidad V_1 ; el segundo cc una velocidad V_2 y una inclinación 2α. El primero hace impacto en 1 segundos y el segundo cae sobre el mismo blanco, situado sobre el plano c lanzamiento , 10 segundos mas tarde. Determinar:

a) La distancia desde la posición de disparo hacia el blanco.
b) Las velocidades V_1 y V_2.
c) Los ángulos de lanzamiento.



c) $x = V_1.10.\cos\alpha = V_2.20.\cos 2\alpha$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = 2\left(\frac{2\cos^2\alpha - 1}{\cos\alpha}\right) \qquad (1)$$

$$x = \frac{V_1^2\,(\text{sen}2\alpha)}{g} = \frac{V_2^2\,(\text{sen}\,4\alpha)}{g}$$

$$\frac{V_1^2}{V_2^2} = 2(2\cos^2\alpha - 1) \qquad (2)$$

$$(1)^2 = (2)$$

$$2(2\cos^2\alpha - 1) = \left(2\left(\frac{2\cos^2\alpha - 1}{\cos\alpha}\right)\right)^2$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \alpha = 35{,}26^\circ \Rightarrow 2\alpha = 70{,}52^\circ$$

b) $$10.V_1.\,\cos\alpha = \frac{V_1^2\,\text{sen}\,2\alpha}{g} \Rightarrow V_1 = 86{,}61\ m/s$$

$$20.V_2.\cos 2\alpha = \frac{V_2^2\,\text{sen}\,4\alpha}{g} \Rightarrow V_2 = 104{,}9\ m/s$$

a) $x = V_1.10.\cos\alpha = 577{,}43m$

40.- Dos equipos de básquet - ball A y B, se encuentran jugando. El marcador favorece a A con un punto y la pelota se encuentra en manos de B que está situado a 10 metros de la base del aro. El aro está a 2,40 metros del suelo y cuando falta 1 segundo para terminar el partido, el jugador lanza la pelota desde dos metros de altura y convierte, Determinar:

a) La velocidad de lanzamiento.
b) El ángulo de lanzamiento.

a) $V_x = \dfrac{x}{t} = \dfrac{10m}{1s} = 10m/s$

$$y = V_{0y}.t - (\tfrac{1}{2})gt^2$$

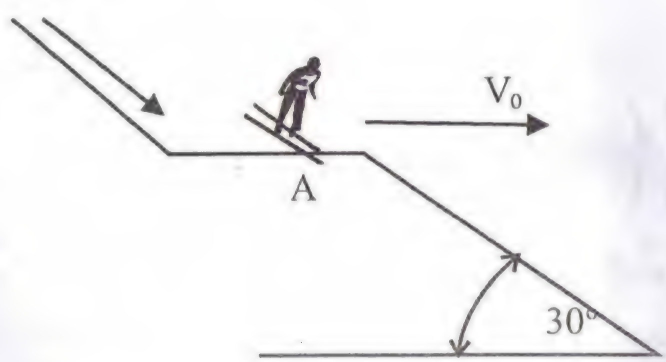
$$V_{0y} = 5{,}4m/s$$

$$\vec{V}_0 = 10\vec{i} + 5{,}4\vec{j}\,m/s$$

b) $\tan\theta = \dfrac{5{,}4}{10} = 0{,}54 \Rightarrow \theta = 28{,}36^o$

41.- Un esquiador inicia un salto horizontal como se indica en la figura . En que punto golpeará el esquiador sobre una pendiente de 30º, si su velocidad de salida es de 40 m/s. Calcular:

a) La distancia desde A hasta el punto de choque.
b) El tiempo transcurrido desde A hasta el impacto.
c) La velocidad con la que choca en la pendiente



a) $\tan 30^o = \dfrac{y}{x}$

$$y = \tan\theta\, x - \tfrac{1}{2} g . \frac{X^2}{40^2 .1}$$

de (I)

$y = \tan 30^o . x$

$$- x \tan 30^o = - \frac{1{,}10 x^2}{2(1600)}$$

$x = 106{,}66 m$

$P = (184{,}75 - 106{,}66)$ m

$\vec{r} = 184{,}75\vec{i} - 106{,}66\vec{j}$ m

$|\vec{r}| = 213{,}32$ m

b) $V_{0x} = \dfrac{x}{t} \Rightarrow t = \dfrac{x}{V_{0x}}$ $\qquad t = \dfrac{184{,}75}{40} = 4{,}52s$

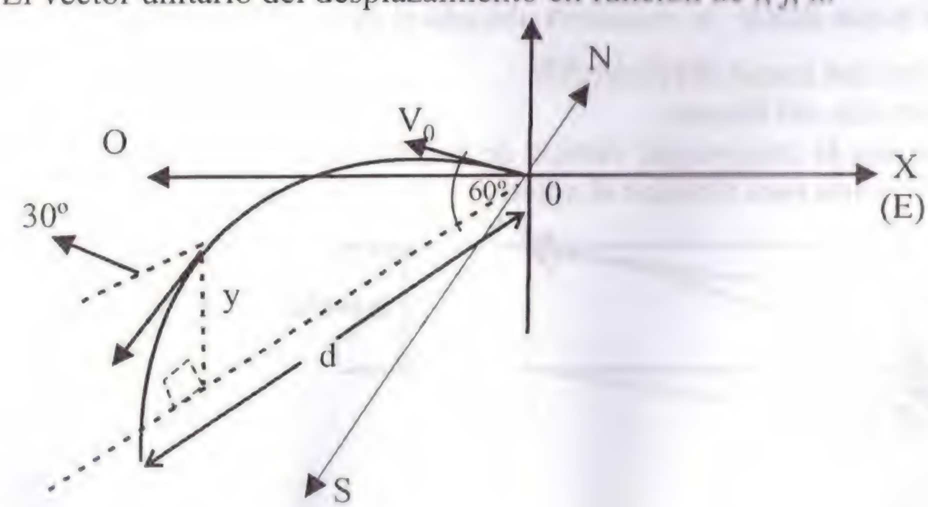
c) $V_x = 40$

$V_y = 0 - g.(4{,}62) = - 46{,}2$ m/s

$\vec{V} = 40\vec{i} - 46{,}2\vec{j}$ (m / s)

42.- Una pelota es lanzada con una velocidad inicial de 25 m/s en la dirección S 45º O, ángulo de elevación de 60º después de un cierto tiempo la velocidad de la pelota forma un ángulo de depresión de 30º (cuando la pelota está cayendo). Determinar :

a) El tipo de movimiento de la pelota en cada uno de los ejes.
b) El tiempo transcurrido desde el lanzamiento hasta que el vector velocidad forme el ángulo indicado.
c) El vector desplazamiento durante ese intervalo de tiempo.
d) El vector unitario del desplazamiento en función de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.



a)

Eje	Tipo de movimiento
X	Movimiento uniforme
Y	Movimiento uniforme variado
Z	Movimiento uniforme.

b) $V_0 = 25\ m/s$

$V_{0d} = V_0 \cos 60^\circ = V \cos 30^\circ \qquad V = 14{,}43 m/s$

$-V_y = V_{0Y} - gt$

$$t = \frac{25.\text{sen } 60^\circ + 14{,}43 \text{sen } 30^\circ}{10 m/s^2}$$

$t = 2{,}89\ s$

c) $V_Y^2 = V_{0y}^2 - 2.g.y$

$$y = \frac{(25.\text{sen}.60^\circ)^2 - (14{,}43\text{sen}30^\circ)^2}{2.10} = 20{,}87m$$

$d = V_{0d}.t = 36{,}08s$

$x = z = d\ \cos 45^\circ = 25{,}5m$

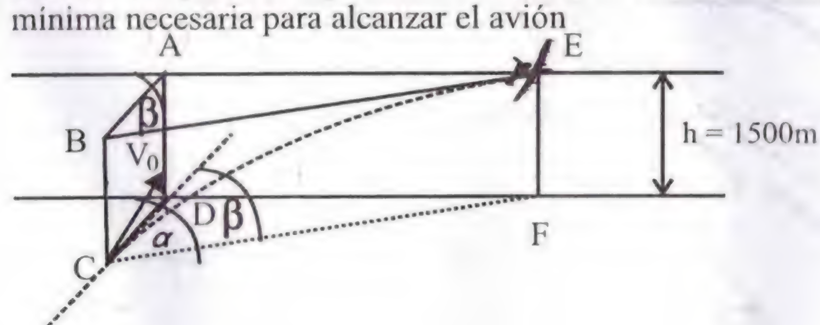
$\overrightarrow{\Delta r} = (-\ 25{,}5\vec{i} + 20{,}87\vec{j} + 25{,}5\vec{k})m$

d) $\Delta r = 41{,}68\text{m} \quad \vec{u}_{\Delta r} = \dfrac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta r} = (-\ 0{,}61\vec{i} + 0{,}5\vec{j} + 0{,}61\vec{k})$

43.- Un avión vuela horizontalmente a una altura de 1500 metros en línea recta con una rapidez de 540 km/h (constante); un cañón antiaéreo (C) se encuentra situado a una distancia de 1000 m de la proyección de la trayectoria de avión sobre el suelo. En el instante que el avión pasa por el punto A (ver la figura) el cañón dispara. A es el punto de intersección entre la trayectoria del avión con el plano vertical perpendicular a la trayectoria anterior; este plana pasa por el punto donde se encuentra ubicado el cañón. Determinar:

a) La velocidad inicial del proyectil.
b) La dirección del disparo.

Considerar que la componente vertical de la velocidad inicial del proyectil, mínima necesaria para alcanzar el avión



a) $y_{máx} = 1500\ m$

$V_{fy}^2 = V_{0y}^2 - 2gy_{máx} \bullet V_{fy} = 173{,}21\ m/s$

$DF = V_{avión}\ .t = 2598m$

$V_{fy} = V_{0Y} - gt \Rightarrow t = 17{,}32s$

$$x = V_{0X}\,.t \Rightarrow V_{0X} = \frac{\sqrt{DF^2 + DC^2}}{t} = 160{,}73m/s$$

$V_0^2 = V_{0X}^2 + V_{0Y}^2 \Rightarrow V_0 = 236{,}29m/s$

b) $\cos\alpha = \dfrac{V_{0X}}{V_0} = \dfrac{160{,}73m/s}{236{,}29m/s} \Rightarrow \alpha = 47{,}14°$

44.- Un disco gira con una aceleración tangencial de magnitud constante de $5\ m/s^2$. Si el radio del disco es 1 metro y parte el disco. Determine:

a) El número de vueltas que da el disco durante el tercer segundo.

B) Resuelva el ejercicio gráficamente ($w_{vs}.t$)

a) $\alpha = \dfrac{\alpha_T}{R} = 5rad/s^2$

en 3 segundos

$\Delta\theta_3 = w_o\, t + \left(\frac{1}{2}\right)\alpha.t^2$

$\Delta\theta_3 = 22{,}5rad$

en dos segundos

$\Delta\theta_2 = \frac{1}{2}\,.(5.2^2) = 10rad$

durante el tercer segundo girará un ángulo igual a:

$[\Delta\theta_3 - \Delta\theta_2] = \Delta\theta$

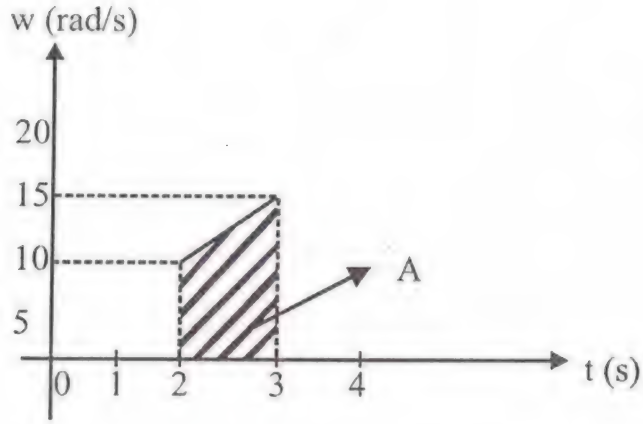
$\Delta\theta = 12{,}5\ rad \left[\dfrac{1\ rev}{2\pi}\right]$ $\qquad \Delta\theta = 1{,}99rev$

b) $w = w_o + \alpha.t$

$t = 0s,\qquad w_o = 0$

$t = 2s;\qquad w_2 = 10(rad/s)$

$t = 3s;\qquad w_3 = 15(rad/s)$



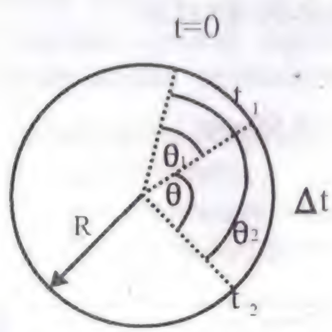
$$\Delta\theta = (3 - 2).10 + \tfrac{1}{2}(3 - 2).(15 - 10)$$

$$\Delta\theta = 12{,}5\ rad\ .\frac{1rev}{2\pi rad}$$

$$\Delta\theta = 1{,}99rev\ .$$

45.- Una rueda de 2 metros de radio tiene una aceleración angular constante de 0 rad/s2. En un intervalo de 4 segundos gira un ángulo de 120 radian alcanzando posteriormente una velocidad angular de 96 rad/s. Suponiendo q partió del reposo. Determinar:

a) El tiempo que había estado en movimiento antes del intervalo.
b) El ángulo total girado.
c) La longitud de arco de circunferencia recorrida por un punto extremo de rueda desde que empezó a moverse.
d) La rapidez media de un punto extremo de la rueda.



a) $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\theta_2 = w_0.t_2 + \left(\tfrac{1}{2}\right).\alpha.t_2^{\,2}$$

$$\theta_1 = w_0.t_1 + \left(\tfrac{1}{2}\right).\alpha.t_1^{\,2}$$

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 = w_0.(t_2 - t_1) + (\tfrac{1}{2}).a.(t_2^2 - t_1^2)$$

$$\theta = (\tfrac{1}{2}).a.(t_2 + t_1).\Delta t$$

$$(t_2 - t_1) = 4s \qquad (t_2 + t_1) = 120s$$

$$t_1 = 58s \qquad t_2 = 62s$$

b) $w^2 = w_0^2 + 2.a.\theta$

$$\theta = 9216\ rad$$

c) $s = \theta R = 9216.2 = 18432\ m$

d) $V_{media} = \overline{V} = {}^{s}\!/_{t} = 96\ m/s$

$$w_F = w_0 + a.t$$

$$t = \frac{w_F}{a} = 192s$$

46.- Demostrar que cuando un cuerpo parte del reposo y gira en una circunferencia con aceleración tangencial constante; la aceleración centrípeta del cuerpo esta dada por: $a_C = 2\ .a_t.\tan\theta$

$$\theta = w_0.t + \left(\frac{1}{2}\right) A.t^2$$

$$\theta = \frac{1.a_t.t^2}{2.R}$$

$$a_t = \frac{2.\theta.R}{t^2}$$

a partir del inicio del movimiento

$$w = w_0 t + a.t$$

$$\frac{V}{R} = \frac{a_t}{R}.t$$

$$V = a_t.t$$

$$a_c = \frac{V^2}{R}$$

$$a_c = \frac{(a_t.t)^2}{R} = \frac{a_t.a_t.t^2}{R}$$

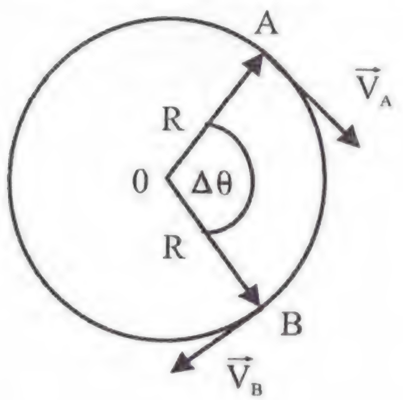
$$a_c = \frac{a_t.2.\theta.R.t^2}{t^2.R}$$

$a_c = 2.\ a_t.\tan\theta$ lqqd.

47 .- Una partícula se mueve con una velocidad de módulo constante V, sobre una circunferencia de radio R. La partícula se mueve desde la posición A hasta la posición B, girando un ángulo $\Delta\theta$ su vector posición. Demostrar que:

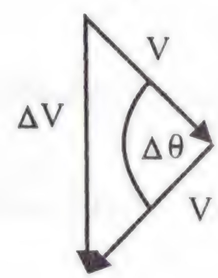
a) El tiempo de A hasta B es $t = R\,\Delta\theta / V$.

B) El módulo de la aceleración media es: $a_m = \left(\sqrt{2}.\sqrt{\dfrac{1-\cos\Delta\theta}{\theta}}\right)\dfrac{V^2}{R}$



A) $\varpi = \dfrac{\Delta\theta}{t}$ $\qquad \varpi = \dfrac{V}{R}$ $\qquad t = \dfrac{\Delta\theta.R}{V}$

b) El módulo de la aceleración media será:



$$a_m = \frac{\Delta V}{t}$$

$$(\Delta V)^2 = V^2 + V^2 - 2V.V.\cos\Delta\theta$$

$$(\Delta V)^2 = 2V^2 + 2.V^2.\cos\Delta\theta$$

$$(\Delta V)^2 = 2V^2(1-\cos\Delta\theta)$$

$$a_m = \frac{\sqrt{2}.V.\sqrt{1-\cos\Delta\theta}}{R.\Delta\theta/V}$$

$$a_m = \frac{\sqrt{2}.V.\sqrt{1-\cos\Delta\theta}}{R.\Delta\theta/V}$$

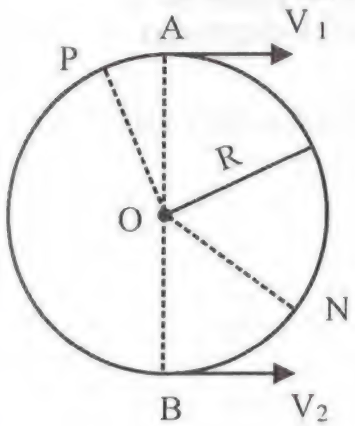
$$a_m = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{1-\cos\Delta\theta}.V^2}{R.\Delta\theta}$$

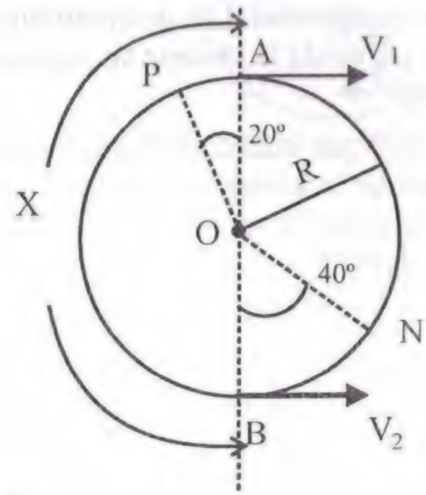
48 .- Dos móviles recorren una pista circular horizontal como se indica en la figur Parten el mismo instante de dos puntos A y B diametralmente opuestos moviéndose en sentidos contrarios. Se cruzan por primera vez en el punto N

$BN = 40$m y una segunda vez en el punto P, $AP = 20m$. Si entre la primera y la segunda vez que se cruzan transcurren 20 segundos. Determinar:

a) La longitud de la pista circular.

b) La rapidez de cada móvil (m/s).





$V_1 \neq V_2$

a) $t_1 = t_2$

$$\frac{x-40}{V_1} = \frac{40}{V_2} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{x-40}{40} \qquad (1)$$

$t_3 = t_4$

$$\frac{(x-40)+20}{V_2} = \frac{40+(x-20)}{V_1} = 20$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{x+20}{x-20} \qquad (2)$$

$(1) = (2)$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{x-40}{40} = \frac{x+20}{x-20}$$

$$x^2 - 60x + 800 = 40x + 800$$

$$x = 100$$

$$L = 200m$$

b) $\dfrac{x+20}{V_1} = 20$ $\qquad$ $\dfrac{x-20}{V_2} = 20$

$V_1 = 6\ m/s$ $\qquad$ $V_2 = 4\ m/s$

49 .- Dos partículas A y B recorren una circunferencia de radio R, en sentidos opuestos, parten simultáneamente del punto P con la misma rapidez inicial V_0 Ver el gráfico. La partícula A acelera uniformemente con una aceleración tangencial constante; mientras que B se retarda uniformemente con la misma aceleración tangencial. Las dos partículas se cruzan en el punto M, en el instante en que la partícula B invierte su movimiento (comienza a regresar).
Determinar:

a) El tiempo que transcurre hasta su encuentro en función de R y V_0.
b) El valor de la aceleración tangencial en función de R y V_0.
c) El ángulo que forman entre si las aceleraciones totales de las dos partículas en el punto M.

a) $\alpha_A = \alpha \,.\, rad/s^2$

$\alpha_B = -\alpha \,.\, rad/s^2$

$$\theta_1 = \left(\frac{V_0}{R}\right).t + \alpha.\frac{t^2}{2} \qquad (1)$$

$$\theta_2 = \left(\frac{V_0}{R}\right).t - \alpha.\frac{t^2}{2} \qquad (2)$$

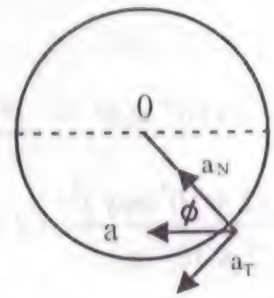
$$\theta_1 + \theta_2 = 2\pi = 2.\left(\frac{V_0}{R}\right).t$$

$$t = \frac{\pi.R}{V_0}$$

b) $\varpi_f = 0 \quad \varpi_0 - \alpha.t = 0$

$$\alpha = \frac{V_0}{R.t} = \frac{V_0}{R\left(\frac{\pi.R}{V_0}\right)} \qquad \alpha = \frac{V_0^2}{\pi.R^2}$$

c)



$$\alpha = \frac{a_T}{R} \Rightarrow a_T = \left(\frac{V_0^2}{\pi.R^2}\right)R$$

$$\varpi_f = \varpi_0 + \alpha.t = \varpi_0 + \left(\frac{V_0^2}{\cancel{\pi}.R^2}\right)\frac{\pi.R}{V_0} = \varpi_0 + \frac{V_0}{R}$$

$$\varpi_f = 2\left(\frac{V_0}{R}\right); \qquad V_f = 2.V_0; \qquad a_N = 4\left(\frac{V_0^2}{R}\right)$$

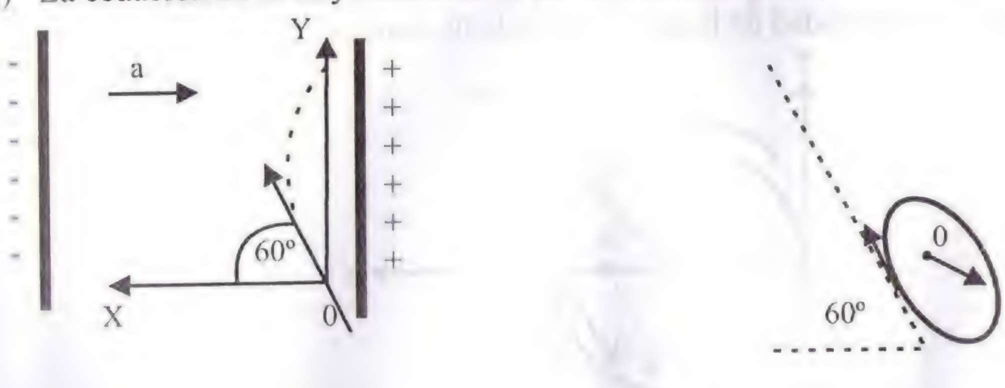
$$\tan\phi = \frac{a_T}{a_N} = \left(\frac{V_0}{\pi.R}\right)\cdot\left(\frac{R}{4V_0}\right) = \frac{1}{4.\pi}$$

$$\phi = 4{,}55^{\circ}$$

$$\angle_0 = 90 - \phi = 85{,}45^{\circ}$$

30.- Un electrón (e^-) parte del reposo y se desplaza con movimiento uniforme variado en una órbita circular de radio R, que forma un ángulo de 60º con la horizontal (ver figura). En el instante en que su rapidez es de 2×10^7 m/s su aceleración vale 4×10^7 m/s^2 y forma un ángulo de 30º con la tangente a la curva en ese punto; sale disparado dirigiéndose a un campo electromagnético, que produce en el electrón una aceleración resultante (horizontal) de $1{,}8 \times 10^{15}$ m/s^2 como se indica en la figura . Determinar:

a) El módulo de la aceleración centrípeta en el instante de salir disparado.
b) La aceleración angular.
c) El tiempo que giró el electrón
d) En el campo: el tipo de movimiento del electrón en cada eje.
e) La ecuación de la trayectoria en el interior del campo.



a) $V_f = 2 \times 10^7\ m/s$
$a = 4 \times 10^{17}\ m/s^2$
$a_C = a.\ \text{sen } 30^o$
$a_C = 2 \times 10^{17}\ m/s^2$

b) $a_C = 2 \times 10^{17}\ m/s^2 = \dfrac{V^2}{R}$

$$R = \frac{(2 \times 10^7\ m/s)^2}{2 \times 10^{17}\ m/s^2} = 2 \times 10^{-3}\, m$$

$$\alpha = \frac{a_t}{R} = \sqrt{3} \times 10^{20}\ rad/s^2$$

c) $\omega_f = \varpi_0 + \alpha.t$

$$t = \frac{\left(\dfrac{2 \times 10^7\ m/s}{2 \times 10^{-3}\ m}\right)}{\sqrt{3} \times 10^{20}\ rad/s^2}$$

$$t = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 10^{-10}\ s$$

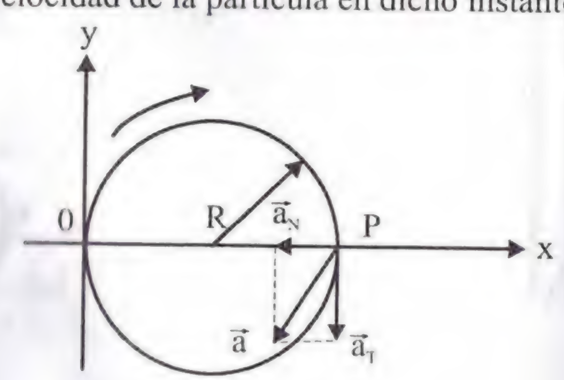
d) eje y = movimiento rectilíneo uniforme
eje x = movimiento uniforme variado

e) $x = \tan 30^o.y - \dfrac{a_x}{2.V_0^2.\cos^2 30^o}.y^2$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{.3}.y - 3y^2$$

51.- Una partícula se mueve en sentido horario por una circunferencia de radio 1m; con centro en (x, y) = (1, 0) metros. Empieza desde el reposo en el origen del sistema de coordenadas en el instante t = 0. Luego de recorrer media circunferencia la magnitud de la aceleración total es a = $\pi / 2\ (m/s^2)$.

a) ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer la mitad de la circunferencia?
b) ¿Cuál es la velocidad de la partícula en dicho instante



$\Delta\theta = \pi$

$a = \frac{\pi}{2}$

$a^2 = a_T^2 + a_n^2$ (1)

a) $\varpi^2{}_p = \varpi^2{}_0 + 2.\alpha.\Delta\theta$

$a_n = \varpi^2{}_p.R$

$a_n = 2.\alpha.\Delta\theta.R$ (2)

$a_T = \alpha\,.\,R$ (3)

(3) y (2) en (1)

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = (\alpha.R)^2 + (2\alpha\Delta\theta.R)^2$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\pi^2}{4.R^2(1+4\Delta\theta^2)}}$$

$\alpha = 0{,}246 \text{ rad / s}^2$

$\Delta\theta = \phi_0.t + \frac{1}{2}.\alpha.t^2$

$t = 5{,}05$ s

b) $V_P = \varpi_P.\,R = (\alpha).\,R = 1{,}24$ m/s

$\vec{V}_P = -\,1{,}24\ \vec{j}\text{m / s}$

Problemas propuestos

1.- Si A se mueve con una velocidad $\vec{V}_A$ y B con una velocidad $\vec{V}_B$ ¿Con qué velocidad ve A que se mueve B?.

2.- Dos automóviles, A y B, parten de un mismo punto; A se dirige hacia el norte con una rapidez constante de 30 km/h y B hacia el Este con una rapidez constante de 40 km/h. ¿ Un pasajero del auto B con qué velocidad ve alejarse a A?.

3.- La velocidad de un río hacia la derecha es $\vec{V}_A$; un bote puede moverse con una velocidad $\vec{V}_B$ respecto al agua, $V_B > V_A$. Determinar:

a) El tiempo que se demora el bote en ir y regresar hasta un punto situado a una distancia d a la izquierda del punto de partida.
b) La velocidad media.

4.- Un remero que alcanza con su canoa una rapidez de 4 km/h en aguas remansas, rema contra corriente en un río cuyas aguas tienen una rapidez de 2 km/h. Después de recorrer ½ km aguas arriba, da vuelta regresando al punto de partida. Determine el tiempo empleado en la travesía.

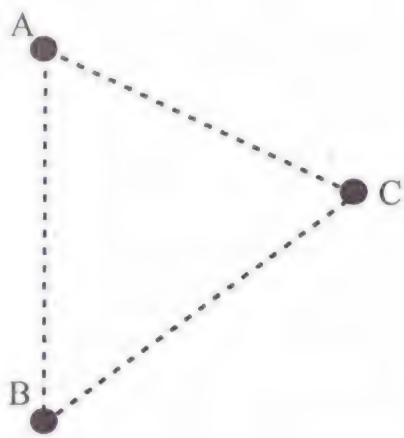
5.- La rapidez de un bote a motor en aguas tranquilas es de 55 km/h. Se quiere ir de un lugar a otro situado a 80 km en la dirección S 20º E. La corriente en esa región tiene una rapidez de 20 km/h, en la dirección S 70º O. ¿En qué dirección debe enfilarse el bote y que tiempo empleará en recorrer esa distancia?

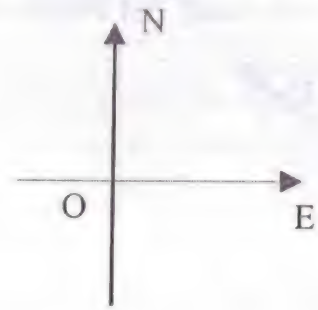
6.- Un avión desea volar hacia el Norte; sus motores le impulsan a razón de 100 m/s en dirección N 30º E. Calcular:

a) El valor mínimo de la rapidez del viento para que el avión se dirija hacia el Norte. Haga un gráfico.
b) Un pasajero que se encuentra dentro del avión, como vería la velocidad con que llega al avión el viento en términos de los unitarios $\vec{i}, \vec{j}$.

7.- Dos puntos A y B, están directamente opuestos en las orillas de un río de ancho 8 km y el agua fluye con una rapidez de 4 km/h. Un hombre situado en A desea ir a un punto C, que esta situado 6 km aguas arriba de B. Si el barco puede navegar con la rapidez máxima de 10 km/h; y si desea llegar a C en el menor tiempo posible. Determinar la dirección que debe tomar el barco y el tiempo que empleará.

8.- Un piloto con un avión desea sobrevolar tres puntos de observación A, B y C, distantes entre si 100 km. La máxima rapidez que desarrolla el avión en aire, tranquilo es de 400 km/h. Se informa al piloto que sobre toda la zona existen vientos de 80 km/h en dirección Este. Calcular el menor tiempo en recorrer las distancias AB - BC y CA. Ver figura.





9.- Considérese un avión cuya rapidez con respecto al aire es de 320 km/h. En su programa hay un viaje redondo entre dos ciudades A y B que distan 640 km. Desprecie el tiempo entre despegar, parar y volver.

a) ¿Cuánto tiempo se llevará hacer el viaje en un día con el aire en calma?.
b) ¿ Cuánto tiempo le llevará en un día en que el viento sopla constantemente a 30 km/h de B a A?.
c) Realice un gráfico en cada caso.

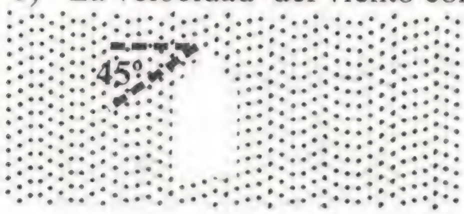
10.- Una lancha es impulsada por su motor con una rapidez de 10 km/h hacia el Oeste, la corriente en la región tiene una rapidez de 5 km/h, en dirección Sur; el viento empuja la embarcación con una rapidez de $3\sqrt{2}$ km/h hacia el N-E. Determinar la velocidad de la lancha:

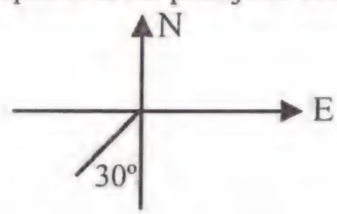
a) respecto al agua.
b) suponiendo que deja de soplar el viento.
c) respecto a tierra.

11.- Un hombre camina sobre una lancha con una rapidez de 4 km /h hacia el Oeste; la hélice de la lancha la lleva a 15 km/h, hacia el N - E, la marea y el viento llevan la embarcación a 5 km/h, hacia el Sur. Determinar:
a) La velocidad relativa del hombre respecto a tierra.
b) La dirección de su velocidad.

12.- La bandera situada en un mástil de un bote de vela flamea haciendo un ángulo de 45º , como se muestra en la figura, pero la bandera situada en una casa a la orilla se extiende 30º al Suroeste. Si la rapidez del bote es 10 km/h. Determinar:

a) La velocidad del viento.
b) La velocidad del viento con respecto a un pasajero del bote.





13.- Un hombre de pie en un ascensor, que se mueve con una rapidez constante V_A = 4 m/s, observa que una mosca se le acerca desde el suelo con una rapidez de 5, 66 m/s y un ángulo de depresión de 45º . Determinar la velocidad de la mosca respecto a tierra cuando el ascensor.

a) baja.
b) sube.

14.-Un tren de carga que va a 42 km/h es seguido 3 horas después por un tren de pasajeros, que parte del mismo punto inicial, y tiene una rapidez de 60 km/h. ¿En cuántas horas el tren de pasajeros alcanzará al de carga y a que distancia del punto de partida?.

15.- Un tren que va a 100 km/h pasa por A en el mismo instante que otro tren que va a 120 km/h pasa por B y van el uno hacia el otro. La distancia entre los puntos A y B es 550 km. ¿ A qué distancia del punto A se encontrarán y a qué hora si los trenes pasan por A y B a las 8:00 a.m?

16.- La distancia entre los puntos A y B es 120 km. Un tren de pasajeros sale de A hacia B y al mismo instante sale un tren de carga de B hacia A. El tren de pasajeros llega a B, una hora después de haberse cruzado con el de carga y el tren de carga llega a A dos horas y cuarto después de haberse cruzado con el de pasajeros. Determinar las velocidades de los dos trenes y el punto de encuentro respecto a A.

17.- Dos móviles parten simultáneamente desde los extremos A y B de una trayectoria rectilínea de longitud 210 metros. Los movimientos de ambos, en dirección contraria, son uniformemente acelerados sin velocidad inicial (V_o = 0). Siendo los valores de las aceleraciones a_1 = 2 m/s^2 y a_2= 4 m/s^2.

respectivamente. Determinar el tiempo que transcurre hasta el encuentro y el punto de encuentro.

18.- Si en el problema anterior, las velocidades iniciales de los móviles A y B son respectivamente $\vec{V}_1 = 30\vec{i}$ m/s y $\vec{V}_2 = -20\vec{i}$ m/s y las demás condiciones son iguales, determinar el espacio que recorre el primer móvil y el tiempo transcurrido.

19.- Un vehículo se mueve sobre una recta con una aceleración constante. Cubre una distancia de 60 metros entre dos puntos A y B en tres segundos. Al pasar el segundo punto (B) se movía a razón de 15 m/s. Determinar:

a) El valor de la aceleración.
b) A qué distancia del primer punto (A), el carro se encontraba en reposo?

20.- En el instante en que la señal luminosa del tráfico cambia a verde un automóvil que ha estado esperando arranca con una aceleración constante de módulo 1,8 m/s^2. En el mismo instante un camión que lleva una velocidad constante de $9\vec{i}$ m/s, alcanza y pasa al automóvil.
a) ¿A qué distancia del punto de partida adelantará el automóvil al camión?
b) ¿Qué velocidad tendrá en ese instante?

21.- Un conductor maneja un vehículo a una rapidez de 25 m/s. Cuando se encuentra a 75 metros de un obstáculo, lo ve pero tarda medio segundo en aplicar los frenos y se detiene en 5 segundos luego de haber aplicado los frenos Demuestre si choca o no con el obstáculo.

22.- Un móvil tiene una velocidad constante de $24\vec{i}$ m/s acelera a razón de 2 m/s^2 durante un cierto tiempo t. En este punto frena a razón de 4 m/s^2, hasta que el móvil se detiene. Si el espacio total recorrido por el móvil es de 240 metros, determinar el valor del tiempo t.

23.- Un cuerpo se deja caer libremente y recorre durante el último segundo de su caída la mitad del camino total. Determinar:
a) El tiempo total de caída.
b) La altura total de caída.

24.- Se lanza verticalmente una pelota hacia abajo con una cierta velocidad inicial $\vec{V}_0$ desde lo alto de un precipicio, utilizando 4 segundos en llegar al fondo. Una segunda pelota es lanzada verticalmente hacia arriba con la misma rapidez. V_0, utilizando 10 s en llegar al fondo del precipicio.
Determinar:

a) La rapidez V_0 con que fueron lanzadas las pelotas.
b) La altura del precipicio.

25.- De un grifo de agua caen 480 gotas por cada minuto. Si cada gota demora 0,5 segundos en llegar al suelo, cuando la primera gota toca el suelo determine la distancia que separa a la segunda y tercera gotas.

26.- Desde la terraza de un edificio bien alto construido en una estación lunar se deja caer un objeto verticalmente. 5 segundos mas tarde al pasar este objeto por una ventana situada 20 metros más abajo, se deja caer un segundo objeto desde la misma terraza. ¿Qué distancia se encontrarán separados los dos objetos cuando, el primero ha caído 10 segundos?

27- Se lanzan dos cuerpos verticalmente hacia arriba, con la misma velocidad inicial pero separados 4 segundos. $V_o = 30$ m/s.

a) ¿Qué tiempo transcurrirá desde que se lanzo el primero para que se vuelvan a encontrar?
b) ¿A qué distancia por encima del suelo se encontrarán?
c) ¿Cuáles son las velocidades de cada uno en el momento de encuentro?

28- La plataforma de un elevador se mueve hacia abajo con una velocidad constante de $-15\vec{j}$ pies/s, cuando la plataforma topa una piedra que sobresale de la pared del pozo provocando su caída. Suponiendo que la piedra parte del reposo. determinar.

a) La distancia que habrá recorrido la piedra cuando alcanza la plataforma.
b) El tiempo transcurrido.

29.- Se deja caer una piedra desde un elevado precipicio y un segundo más tarde es lanzada otra piedra verticalmente hacia abajo con una rapidez de 18 m/s. ¿A qué distancia por debajo del punto más alto del precipicio, alcanzará la segunda piedra a la primera?

30.- Por el pozo de una mina caen gotas de agua a razón de 4 gotas por segundo. Un montacargas que sube por el pozo a 10 m/s es alcanzado por una gota de agua cuando está a 100 metros por debajo del suelo, ¿Dónde y cuando alcanzará la próxima gota al montacargas?

31.- Un niño que se encuentra en el suelo de un elevador que desciende a velocidad constante de $-10\vec{j}$ m/s brinca hasta una altura de 50 cm sobre el piso. ¿Qué distancia recorre el elevador mientras el niño llega al piso nuevamente?.

32.- Dos vehículos A y B circulan por carretera rectas que forman un ángulo entre sí. El vehículo A se mueve con velocidad constante y para el tiempo t = 2 s se encuentra en el punto de coordenadas (0,30) m, cuando t = 5 s.

en el punto (-40, 0) m; el vehículo B se mueve con movimiento rectilíneo uniformemente variado y al tiempo $t = 4s$ se encuentra en el punto (-50, 0) m con una velocidad $\vec{V}_B = 10\vec{i}$ m/s y al tiempo $t = 14$ s tiene una velocidad de $15\vec{i}$ m/s. Determinar:

a) La velocidad del vehículo A.
b) La aceleración de B.
c) La velocidad inicial de B para $t = 0$.
d) La velocidad de B para cualquier tiempo.
e) La posición de A para $t = 0$
f) Posición inicial de B.
g) Posición de A para cualquier tiempo.
h) Posición de B para cualquier tiempo.
i) El desplazamiento desde los 5 hasta los 10 s.

13.- Una partícula que inicialmente se encuentra en el punto B (3, 4, 5) metros respecto a un punto A, recorre un espacio $\overline{BC}$ en 2 s, con una velocidad constante de $2\vec{i} + \vec{j}$ (m/s). Otra partícula cubre una distancia $\overline{DE}$ en 0,5s con una velocidad constante de $-4\vec{i} + 2\vec{k}$ (m/s) Si las coordenadas del punto D con respecto a C son: (1,0,3) m. Determinar:

a) La posición de A con respecto a E.
b) El vector BD
c) El vector unitario paralelo a $\overrightarrow{DB}$.

14.- Una partícula que se desplaza con movimiento rectilíneo a $t = 10$ s, se encuentra en reposo en el punto P (3, 2, 1) m. Si sobre ella actúa una aceleración aplicada en dirección N 30º E y con un ángulo de depresión de 60º cuyos módulos para los intervalos de 0 - 20 segundos, de 20 - 40 segundos y de 40 segundos en adelante son: 2 m/s^2 en la dirección indicada; 0 m/s^2 y 4 m/s^2 en dirección contraria. Determinar la posición del punto en el cual la partícula se detiene.

15.- Si una partícula provista de rapidez 10 m/s en el punto de coordenadas (1, 2, 3) m, realiza un movimiento MRUV con una aceleración $\vec{a}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ (m/s^2) por un intervalo de 10 segundos para luego ser sometida a una aceleración $\vec{a}_2 = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ (m/s^2) Determinar:

a) La velocidad de la partícula 10 s después de partir del punto de coordenadas (1, 2, 3) m.

b) El tipo de trayectoria a partir del duodécimo segundo.

c) La velocidad media de la partícula para un intervalo de 15 segundos luego de partir del punto (1, 2, 3) m.

36.- Utilizando un gráfico V - t resuelva el siguiente problema: 'Una partícula se mueve hacia la derecha partiendo del reposo con una aceleración de 2 (m/s^2) hasta que su velocidad es de 6 (m/s) hacia la derecha. Se le somete luego a una aceleración de 6 (m/s^2) hacia la izquierda hasta que el espacio total recorrido sobre la recta, desde que partió, es de 24 metros. Hallar el tiempo total.

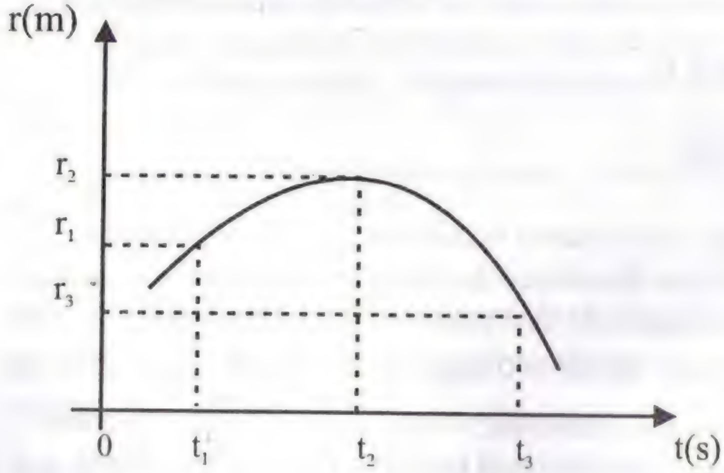
37.- Un objeto es disparado verticalmente hacia arriba con una rapidez Vo desde un edificio de altura H. Construir el gráfico V - t para todo el movimiento del proyectil desde que sale hasta que llega al suelo.

38.- Mediante un gráfico V - t, dar un ejemplo de un movimiento en el cual la velocidad y la aceleración tengan direcciones contrarias.

39.- En la figura calcular en que intervalo de tiempo:

a) La velocidad es negativa.

b) La aceleración es positiva.



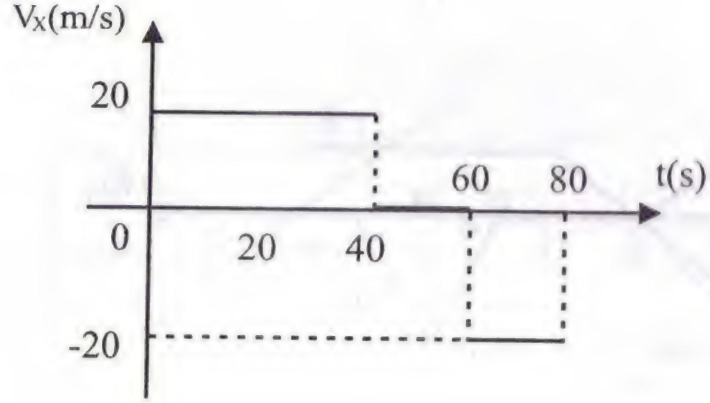
40.- Un vehículo se mueve sobre una carretera recta de acuerdo al siguiente gráfico.

a) Describa el tipo de movimiento del vehículo en cada tramo.

b) ¿Cuál es el espacio total recorrido?

c) ¿Cuál es el vector desplazamiento?.

d) Realice el gráfico x - t. Si para t = 0; $\vec{Xo} = -500\vec{i}$ m.

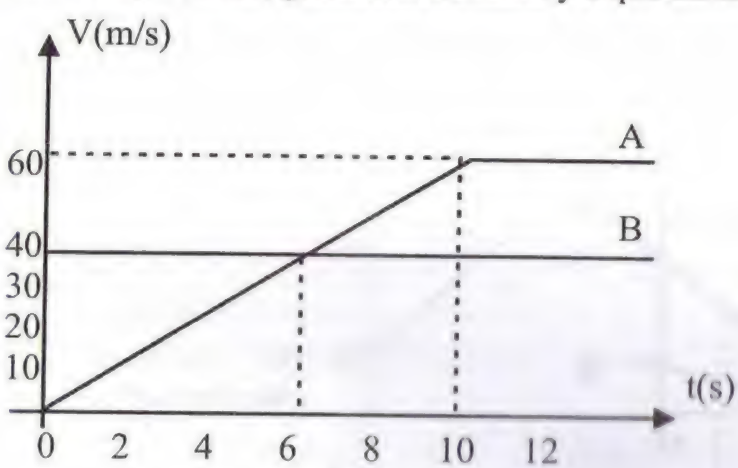


11.- Los gráficos V - t para dos móviles A y B están dados en la figura:

a) ¿Después de qué tiempo el móvil A tiene igual velocidad que B?

b) ¿En ese instante, a qué distancia está B por delante de A?

c) Para t = 0,01 horas, ¿cuál esta adelante y a qué distancia del otro?

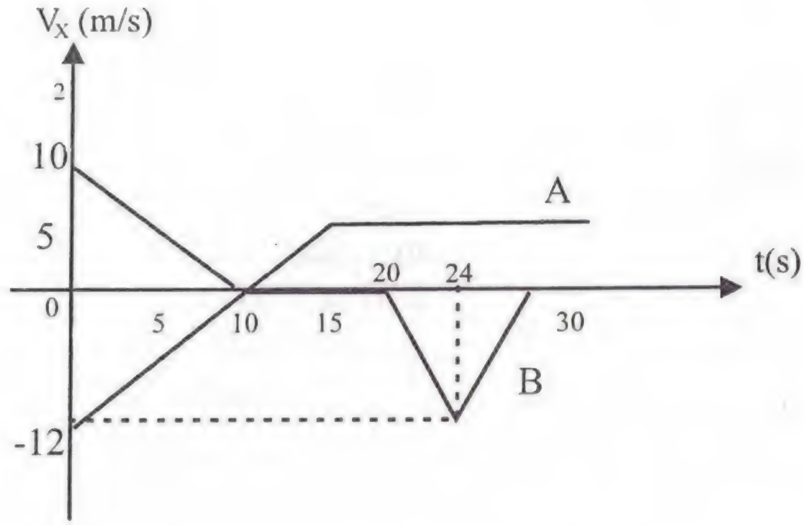


12.- Las partículas A y B se mueven a lo largo del eje de las z. Se conoce el gráfico V_z - t y que a t = 0 segundos ambas partículas se encuentran en la posición $-5\vec{k}$ metros. Determinar:

a) El vector posición de cada partícula para t = 20 s

b) La expresión en función del tiempo de la velocidad relativa de la partícula A respecto a B.

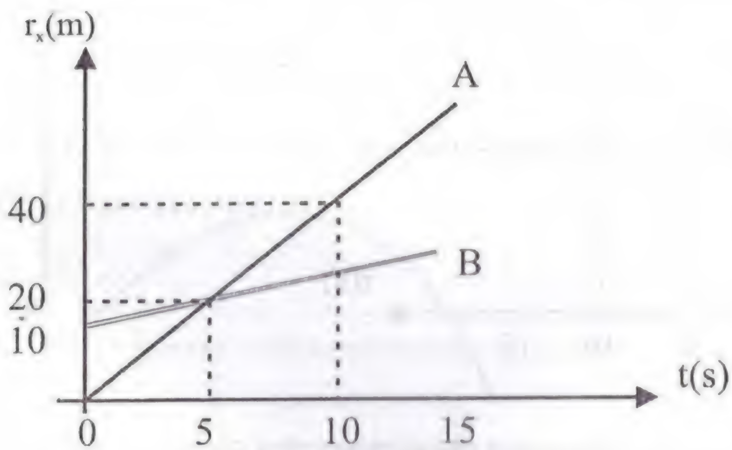
c) La velocidad media de la partícula B para el intervalo de 0 a 30 segundos.



43.- Dos partículas A y B se desplazan con movimiento rectilíneo uniforme de acuerdo al siguiente gráfico posición - tiempo. Determinar:

a) La posición relativa de A respecto a B, para los tiempos t = 0 s; t = 5 s; t = 10 s.

b) La velocidad relativa de A respecto a B, para los instantes indicados anteriormente.



44.- Dado el gráfico de V - t para las partículas A, B, C y conociendo además que los vectores unitarios correspondientes a los desplazamientos de A, B y C son:

$\vec{u}_A = 0{,}2\vec{i} - 0{,}3\vec{j} - a\vec{k}$

$\vec{u}_B = 0{,}42\vec{i} - 0{,}25\vec{j} - b\vec{k}$

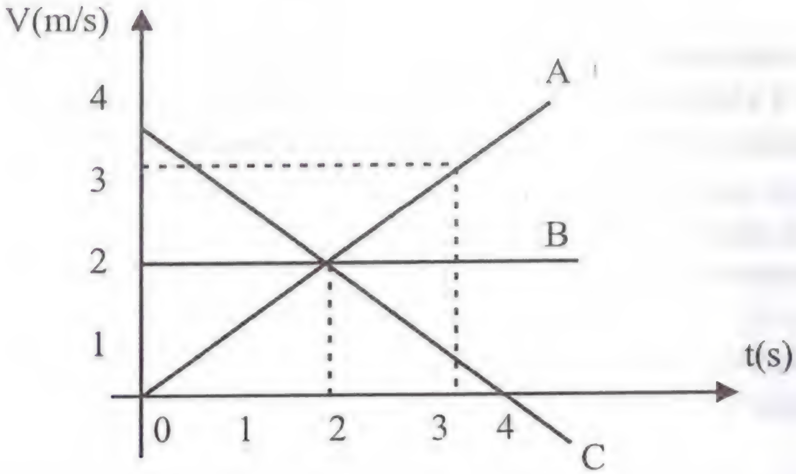
$\vec{u}_C = 0{,}5\vec{i} - 0{,}68\vec{j} - c\vec{k}$

Determinar:

a) Para un segundo la $\vec{V}_{C/B}$.

b) Para dos segundos la $\vec{V}_{A/B}$

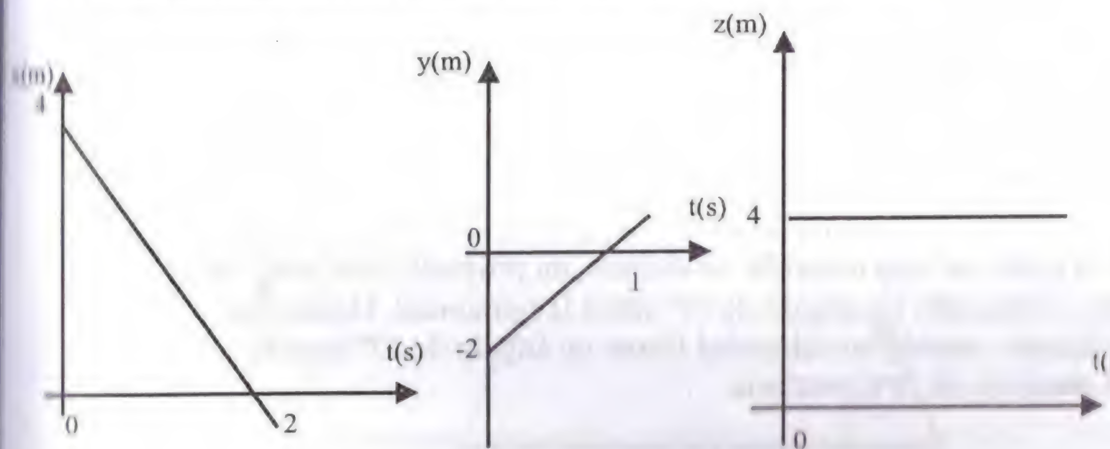
c) Para tres segundos la $\vec{V}_{B/C}$



45.- A partir de los gráficos posición - tiempo, determinar en términos de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

a) El vector posición a los 2,5 segundos.

b) La velocidad media para el intervalo de 1 a 3 segundos.



46.- Una pelota se lanza desde la ventana de un edificio con una velocidad inicial $\vec{V_o}$, y formando un ángulo de 30º sobre la horizontal. Al descenso choca con el edificio que se encuentra al frente con una velocidad $V = 10\sqrt{3}$ m/s que forma un ángulo de 60º bajo la horizontal. Determinar:

a) La velocidad inicial $\vec{V_o}$ de lanzamiento.

b) El tiempo que estuvo en movimiento desde el lanzamiento hasta cuando choca.

c) La distancia que separa los dos edificios.

d) La altura que desciende la pelota, desde el nivel del lanzamiento hasta el punto de choque.

47.- Una pelota se lanza con una velocidad $\vec{V}o$ que forma un ángulo de 60° sobre la horizontal y choca contra un árbol cuando todavía está subiendo con una velocidad de $\sqrt{45}$ m/s y formando un ángulo de 30° sobre la horizontal.

a) ¿A que distancia está ubicado el árbol?
b) ¿A que altura se estrella la pelota?
c) ¿Cuál es el tiempo transcurrido?

48.-¿ En qué punto de la trayectoria de un proyectil , la rapidez del mismo es numéricamente menor que en cualquier otro punto?. Explique.

49.- Se lanza una piedra con una cierta velocidad inicial formando un ángulo de 60° con la horizontal. Luego de un cierto tiempo, la piedra choca contra un punto A de un poste vertical cuando su velocidad forma un ángulo de 30° con la horizontal y cuando está cayendo. Si el punto A está a 5 metros del suelo. Determinar:

a) La velocidad de lanzamiento
b) El tiempo transcurrido
c) La velocidad media
d) La aceleración centrípeta en el punto A

50.- Desde la cima de una montaña se dispara un proyectil con una velocidad de 70,7 m/s , formando un ángulo de 45° sobre la horizontal. Determinar:
a) El tiempo cuando su velocidad forme un ángulo de 53° bajo la horizontal.
b) La ecuación de la trayectoria.

51.- Un artillero dispara un cañón, 10 segundos después ve en el cielo la nubecilla de la explosión que se halla a 22° sobre la horizontal y 8,2 segundos después de verla oye el estampido que el proyectil produce al explotar. Despreciando la resistencia del aire y suponiendo que la rapidez del sonido es 340 m/s Calcular la velocidad inicial del proyectil y el ángulo de tiro.

52.- Un soldado acostado en el suelo lanza una granada con una velocidad inicial de 25m/s y un ángulo de elevación de 53°. ¿Después de que tiempo escuchará el estallido y a que distancia ocurre la explosión? Rapidez del sonido = 340 m/s.

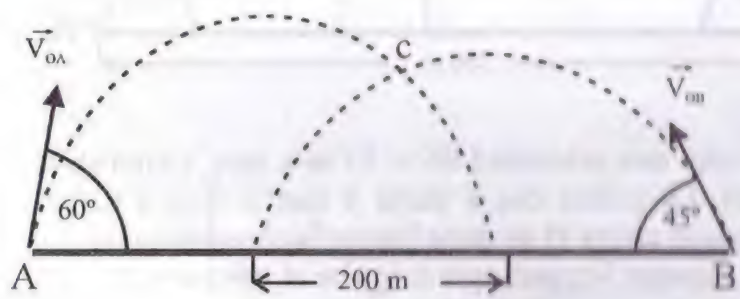
53.- La velocidad de un proyectil cuando se encuentra en la altura máxima es $\sqrt{6/7}$ de su velocidad cuando esta en la mitad de su altura máxima. Determinar el ángulo de lanzamiento.

54.- Un proyectil es disparado desde lo alto de un acantilado hacia arriba con una velocidad Vo = $40\sqrt{2}$ m/s, formando un ángulo de 45º con la horizontal. Determinar la velocidad del proyectil cuando forma un ángulo de 60º con la horizontal(indique en un gráfico).

55.- Se lanza una pelota de tal forma que pasa justamente por dos obstáculos cada uno de 11 metros de altura, que están separados una distancia de 52 metros. Calcular el alcance total del movimiento y la velocidad de lanzamiento, si se conoce que el tiempo empleado en recorrer el espacio entre los dos obstáculos es de 2,6 segundos.

56.- Dos proyectiles A y B, son lanzados como se indica en la figura, después de cierto tiempo se encuentran en C y se demoran 1 segundo y 0,5 segundos respectivamente en llegar al suelo. Si la distancia entre los dos impactos es de 200 metros. Determinar

a) El alcance de cada proyectil
b) Los tiempos de vuelo
c) Las alturas máximas
d) La altura correspondiente al punto C



57.- Dos barcos están navegando en direcciones opuestas a lo largo de trayectorias paralelas separadas entre sí una distancia d. La velocidad de uno de ellos es $\vec{V}_1$ y la del otro es $\vec{V}_2$; en el momento en que la línea que los une es perpendicular a la dirección de sus rumbos, uno de los barcos dispara sobre el otro. Suponiendo que la componente horizontal de la velocidad del proyectil $\vec{V}_0$ con relación al barco que lo disparó es constante, encontrar, en función de $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_0$ y d, cual debe ser el ángulo θ entre la dirección del buque blanco y el plano vertical que pasa por el eje del cañón en el momento del disparo, para que se produzca el impacto.

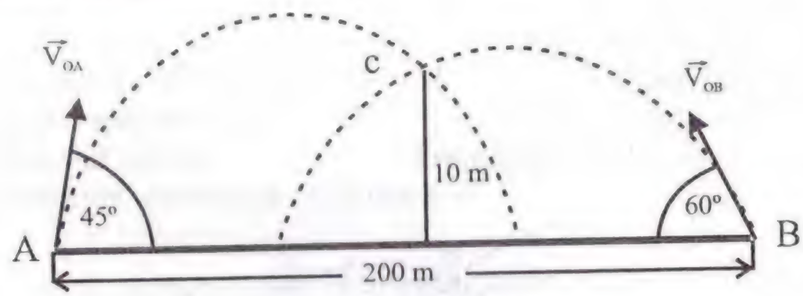
58.- Un montañero se encuentra al borde de un acantilado de 60 metros de altura Este acantilado desciende verticalmente en una altura de 30 metros y a continuación se encuentra una cornisa horizontal de 3 metros de ancho y

Nuevamente presenta una pared vertical de 30 metros. El montañero arroja una piedra de tal manera que a la mitad de su recorrido pasa rozando al borde de la cornisa.

a) Si lanza la roca horizontalmente, ¿cuál debe ser la velocidad inicial?
b) Calcular el módulo y la dirección de la velocidad cuando la roca está a la altura de la cornisa.

59.- Dos cazadores A y B, están enfrentados y situados a 200 metros de distancia, disparan con ángulos de 45° y 60° respectivamente, con una diferencia de tiempo de 1 segundo hacia un mismo blanco que se encuentra a 10 metros de altura sobre el plano en el que los dos se hallan. Si sus proyectiles hacen impacto al mismo tiempo en el blanco. Determinar:

a) Las velocidades iniciales
b) Las distancias horizontales desde el blanco hacia los cazadores
c) .Los tiempos respectivos.



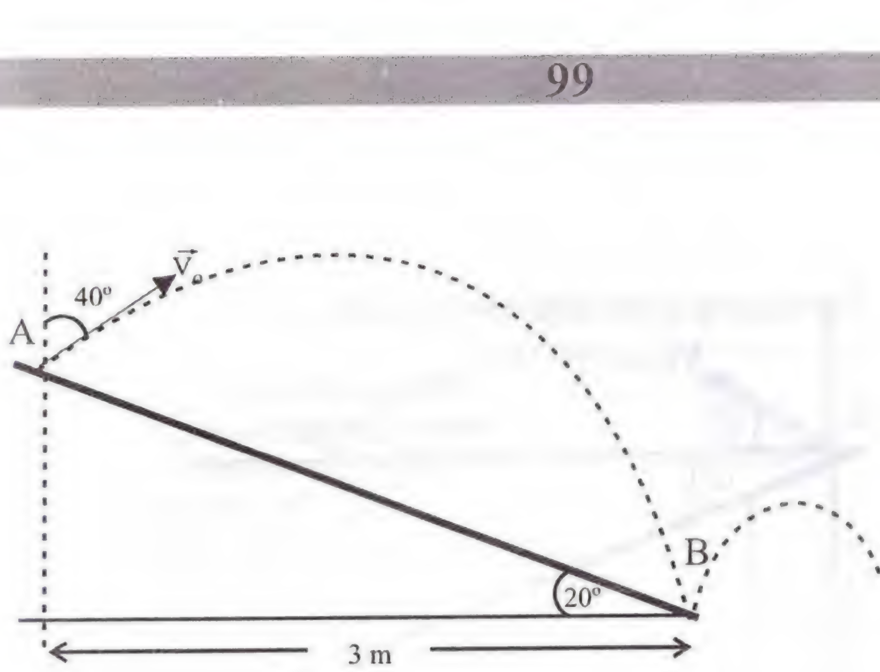
60.- Una pelota se lanza con una velocidad Vo = 12 m/s. que forma un ángulo de 45° con el horizonte. La pelota cae a tierra a una distancia x del sitio de lanzamiento. Desde que altura H se debe lanzar horizontalmente esta misma pelota con la misma rapidez Vo, para que caiga en el mismo sitio.

61- Desde un lugar situado a una altura de 100 metros se lanza horizontalmente un proyectil con una rapidez inicial de 240 m/s.

a) ¿Dónde se encontrará el proyectil al cabo de 4 segundos?
b) ¿Cuál es la velocidad del proyectil en ese instante?

62.- Se deja caer verticalmente una pelota sobre el punto A de un plano inclinado 20°, la pelota rebota formando un ángulo de 40° con la vertical, sabiendo que el próximo rebote tiene lugar en B. Calcular:

a) La velocidad con la cual rebota la pelota en A
b) El tiempo requerido para que la pelota se mueva de A hasta B.

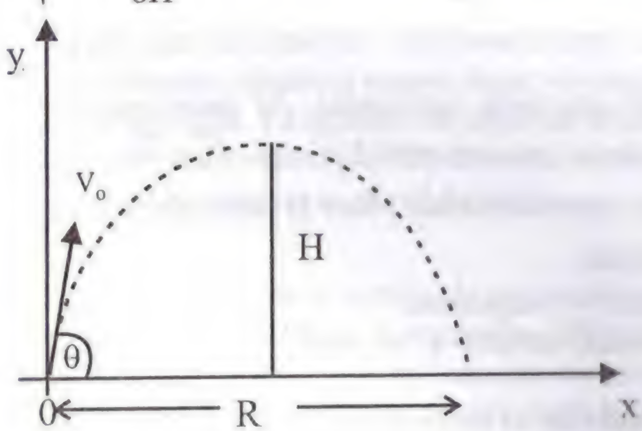


Se quiere que un proyectil tenga una altura máxima H y un alcance R como se indica en la figura. Demostrar que debe ser disparado con ángulo de lanzamiento.

$$\theta = \text{arcsen}\left(\frac{4H}{\sqrt{R^2 + 16H^2}}\right)$$

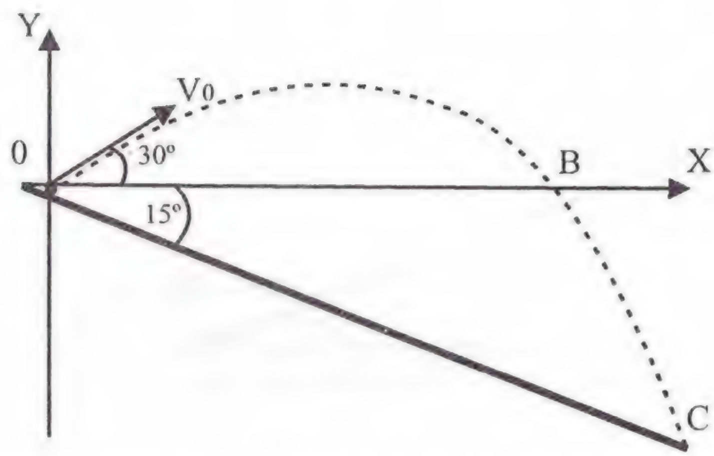
y la rapidez inicial:

$$V_0 = \sqrt{\frac{G(R^2 + 16H^2)}{8H}}$$

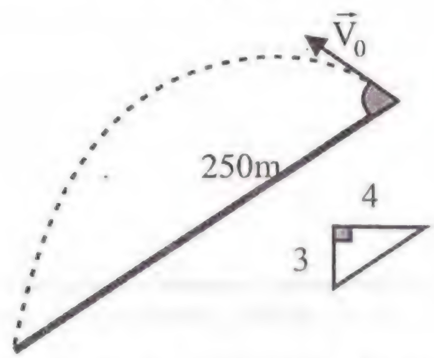


En el gráfico determinar. Si $V_0 = 10$ m/s

a) El tiempo que tarda el proyectil en recorrer el arco OB.
b) El tiempo que tarda el proyectil en recorrer el arco BC.
c) El radio de curvatura en el punto C.
d) La variación del vector velocidad entre los puntos B y C.
e) El vector unitario de la velocidad media para el intervalo B y C.
f) El vector posición del punto C.



65.- Un pequeño objeto se lanza pendiente abajo en la forma indicada en la figura. Determinar la velocidad inicial ($\vec{V}_0$).



66.- Una partícula se mueve sobre una mesa horizontal. Al pasar por el origen de coordenadas al tiempo t = 0 tiene una velocidad inicial $\vec{V_0} = \vec{4i} - \vec{3k}$ (m/s), en ese instante comienza a actuar constantemente sobre la partícula una aceleración $\vec{a} = \vec{-2i} - \vec{2k}$ (m/s^2). Determinar:

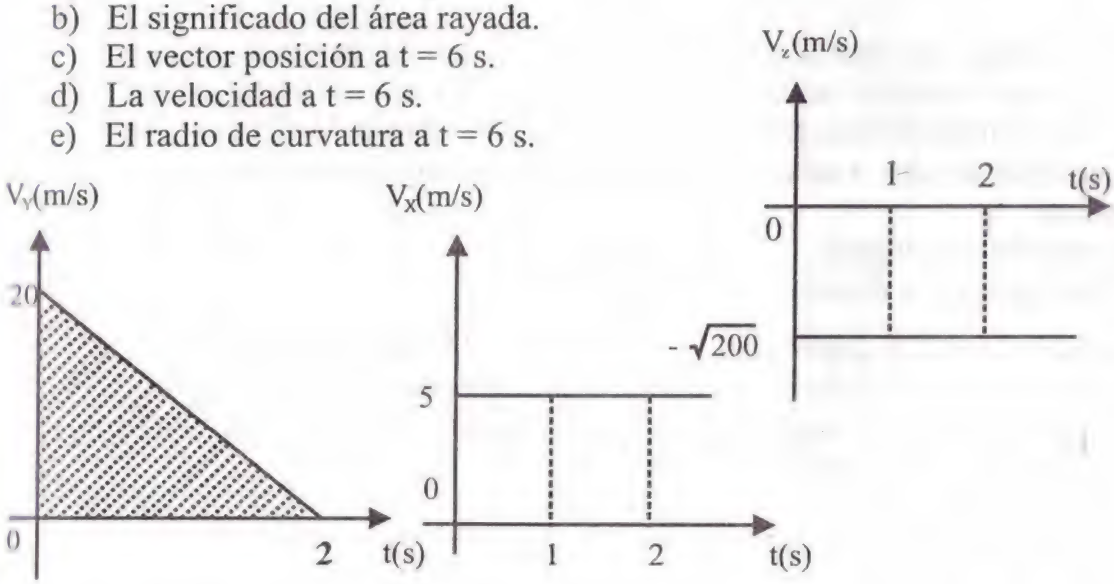
a) La velocidad en el instante t = 5 segundos.
b) Las aceleraciones tangencial, normal y el radio de curvatura a t = 10 segundos.
c) Realice un dibujo aproximado de la trayectoria.

67.- Una partícula que se esta moviendo en el espacio con una velocidad constante $\vec{V_0} = \vec{3i} - \vec{2j}$ (m/s). Determinar, al cabo de 10 segundos de ingresar al campo generado por la tierra.

a) Su desplazamiento.
b) La velocidad.
c) Las aceleraciones tangencial y normal.
d) El radio de curvatura para t = 10 segundos.
e) La velocidad media en el intervalo de 0 a 10 segundos.

68.- Los gráficos corresponden al movimiento de un proyectil. Determinar para este movimiento:

a) La aceleración del proyectil.
b) El significado del área rayada.
c) El vector posición a t = 6 s.
d) La velocidad a t = 6 s.
e) El radio de curvatura a t = 6 s.



69.- Cuando un cuerpo se mueve sobre una circunferencia con rapidez constante, explique si permanece constante su aceleración.

70.- Un disco gira con movimiento uniformemente acelerado. Sobre su periferia se realizan tres disparos, desde el mismo lugar sin cambiar la trayectoria y a intervalos iguales de un segundo. La rapidez del disco en el instante del primer impacto es de 18 revoluciones por minuto (RPM). Determinar en grados, los ángulos formados por los radios de los impactos. $\alpha = 0.1$ rad/s^2.

71.- Una rueda parte del reposo y acelera de tal manera que su rapidez angular aumenta uniformemente a 200 RPM en 6 segundos. Después de haber estado girando por algún tiempo a esta rapidez, se aplican los frenos y la rueda tarda 5 minutos en detenerse. Si el número total de revoluciones de la rueda es de 3.100. Calcular:

a) El tiempo total de rotación.
b) Resuelva el ejercicio gráficamente.

72.- Sobre un eje que gira a razón de 1600 RPM están montados dos discos que se encuentran entre sí a una distancia de 50 centímetros. Una bala disparada paralelamente al eje atraviesa los dos discos, con la particularidad de que el agujero que se produce en el segundo disco resulta desviado un ángulo de 12° con relación al primero. Determinar la velocidad de la bala.

75.- Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio 10 centímetros con una aceleración tangencial de módulo constante. Hallar la aceleración centrípeta de la partícula al cabo de 20 segundos. Si se conoce que al finalizar la quinta vuelta su. rapidez es de 0,1 m/s.

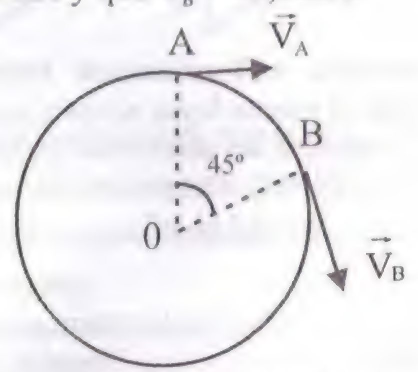
74.- Una atleta lanza un martillo que gira en un plano horizontal con movimiento uniformemente variado, antes del lanzamiento. El momento en el cual sale el martillo de la trayectoria circular descrita tiene una rapidez de 100 m/s, y se conoce que el martillo dio dos vueltas antes de salir disparado y el radio de giro es 2 metros, Determinar:

a) Su aceleración angular
b) El tiempo que se demoró en las dos vueltas.

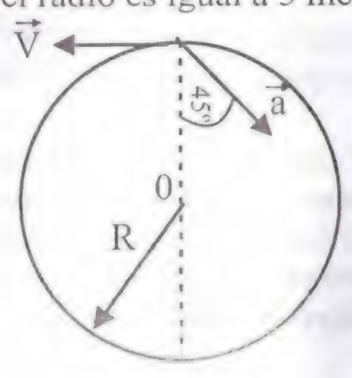
75.- Un automóvil entra a una curva de 1000 metros de radio con una rapidez de 72 Km/h. La magnitud de la velocidad se incrementa constantemente en 2,5 metros por segundo por cada segundo transcurrido. Cuando el automóvil ha recorrido 500 metros sobre la curva. Determinar:

a) El tiempo transcurrido desde que tomó la curva.
b) El ángulo formado por la aceleración instantánea con el radio.

76.- En la figura determinar la aceleración media de la partícula entre las posiciones A y B Sabiendo que $V_A = 20$ m/s y que $V_B = 48,2$ m/s.

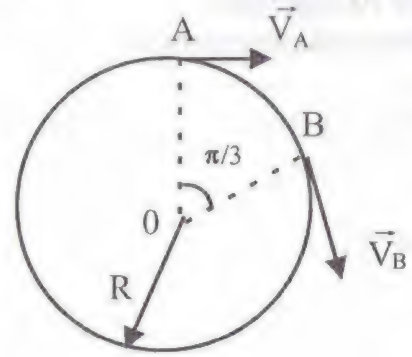


77.- En la figura se indican los vectores velocidad y aceleración instantáneas. Determinar los valores del módulo de la velocidad y de la aceleración tangencial en ese instante. Si el radio es igual a 5 metros y el módulo de la aceleración es igual a 50 m/s^2.



Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio 4 metros. Parte del punto A con una rapidez de 5 m/s y con una aceleración tangencial constante en módulo Luego pasa por el punto B con una rapidez de 10 m/s. Determinar:

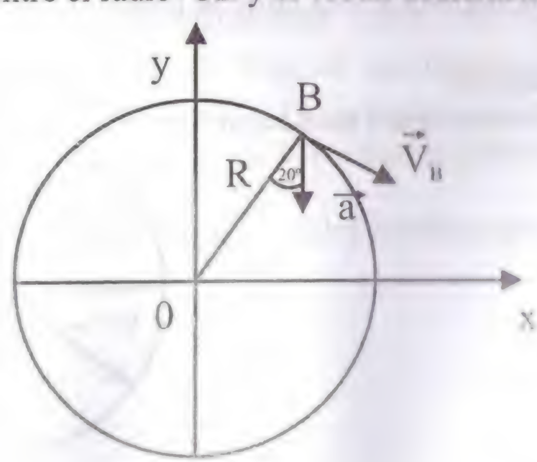
a) El vector aceleración media entre los puntos A y B.
b) La aceleración tangencial en B.
c) La aceleración normal en B.



Una partícula parte del reposo desde el punto P con una aceleración tangencial de magnitud constante igual a de 2^2 m/s^2, siguiendo una trayectoria circular de radio 10 metros. Cuando ha girado un ángulo igual a $2\pi/3$ radianes. Calcular en términos de los unitarios $\vec{i},\vec{j}$.

a) La velocidad de la partícula
b) La aceleración normal.
c) La aceleración.

Si las características del movimiento de una partícula en el punto B están dadas en la figura. Determinar en términos de los vectores unitarios normalizados $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ la velocidad de la partícula en dicho punto. Se conoce que el módulo de la aceleración en el punto B es igual a 2 m/s^2; que el radio del círculo es igual a 1,2 m. y que el ángulo entre el radio OB y el vector aceleración es igual a 20º.

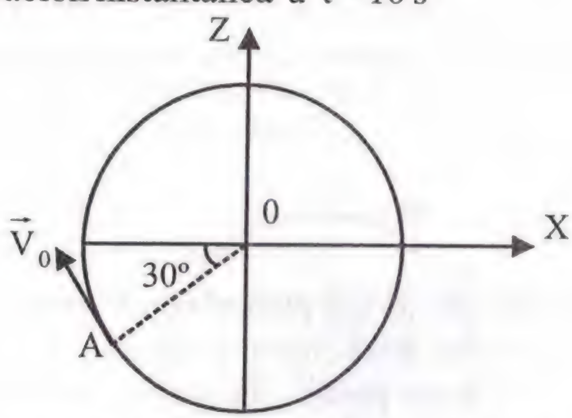


81.- Una partícula se desplaza antihorariamente con movimiento circular uniforme alrededor del origen de coordenadas a una distancia de 10 m. Si al tiempo t = 0 s tiene una velocidad $\vec{V}_o = 70{,}7\vec{i} - 70{,}7\vec{j}$ m/s. Determinar:

a) Su posición angular inicial
b) Su posición angular para cualquier tiempo.
c) La velocidad a los 10 segundos.
d) La aceleración para cualquier tiempo.

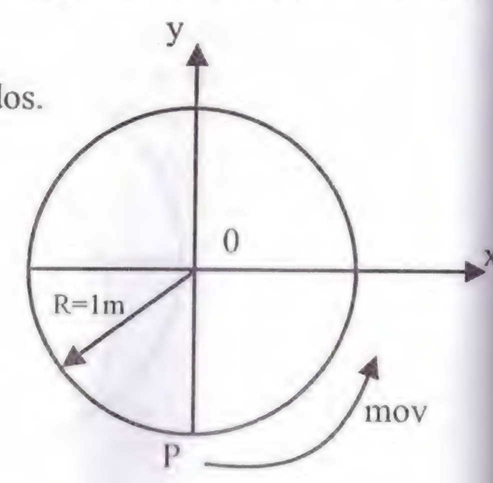
82.- Una partícula se mueve por una trayectoria circular de radio 1 m como se indica en la figura. Al instante t = 0,5 s se encuentra en el punto A, a partir del cual su movimiento es uniformemente retardado, con una aceleración angular $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad/s^2. Si la rapidez inicial V_o = 4 m/s, determinar para a intervalo de 0 a 10 segundos.

a) El número de revoluciones efectuadas.
b) El vector desplazamiento.
c) La velocidad media.
d) La aceleración instantánea a t = 10 s



83.- Una partícula parte del reposo en el punto P y se mueve sobre un trayectoria circular con MCUV, 4 segundos mas tarde la magnitud de su aceleración es a = 8.246 m/s^2 . Calcular:

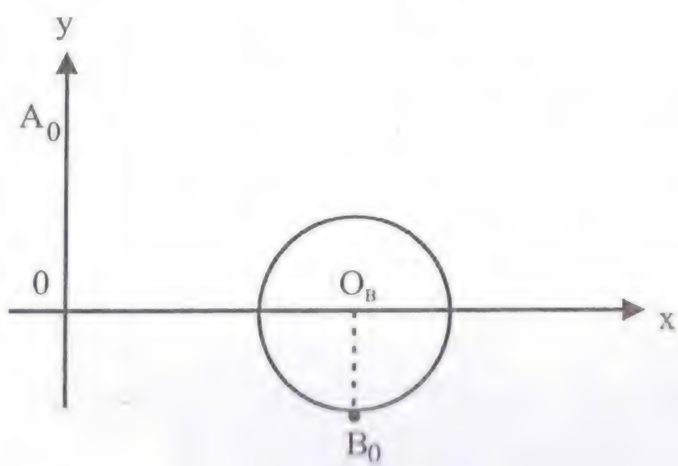
a) La aceleración angular.
b) La velocidad de la partícula a los 4 segundos.



84.- Dos partículas A y B se muven en el plano XY. La partícula A se mueve con velocidad constante $\vec{V}_A = -2\,j$ m/s, la partícula B se desplaza a lo largo del círculo de radio $R_B = 4$ m. y su centro es el punto O_B (10,0) m antihorariamente con velocidad angular constante $\vec{w} = \pi \vec{k} \ \frac{rad}{s}$. Las dos partículas inician su movimiento al mismo instante t = 0 s en los puntos A_o (0;10) m. y B_o (10;-4) m. Determinar al instante t = 1.5 segundos, en términos de los unitarios normalizados.

a) La posición de A con respecto a B.

b) La velocidad de B con respecto a A.



85.- Una partícula se mueve antihorariamente sobre una circunferencia de radio 10 m. En el instante en que t = 5 s, se encuentra en la posición $10\vec{i}$ m, y su aceleración es $\vec{a} = -5\vec{i} + 4\vec{j}$ m/s^2. Determinar para el instante t = 0 s:

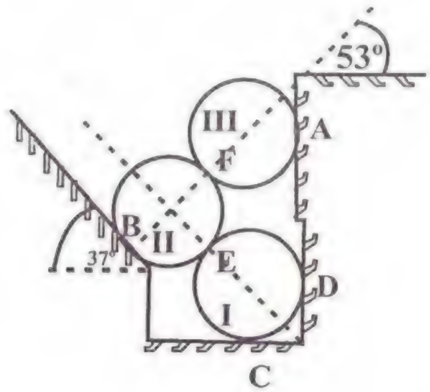
a) La velocidad inicial en términos de los unitarios normalizados.

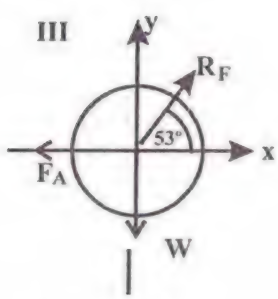
b) La aceleración angular.

c) La aceleración normal en términos de los unitarios normalizados.

DINAMICA

1.- En el sistema de la figura, todos los cilindros tienen igual peso (W) e igual radio (R). Expresar en función de W, los valores de las reacciones en A, B, C y D.





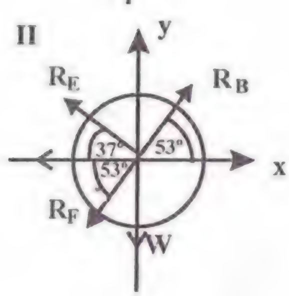
$\sum \overrightarrow{Fx} = 0$

$R_F \cos 53° = R_A \quad (1)$ $\qquad \dfrac{(2)}{(1)} = \dfrac{R_F \operatorname{sen} 53°}{R_F \cos 53°} = \dfrac{W}{R_A}$

$\sum \overrightarrow{Fy} = 0$

$R_F \operatorname{sen} 53° = W \quad (2)$ $\qquad R_A = 0{,}75\ W$

$R_F = 1{,}25W$



$\sum \overrightarrow{Fx} = 0$

$R_B \cos 53° - R_E \cos 37° - R_F \cos 53° = 0$

(3) $R_E \cos 37° = R_B \cos 53° - R_F \cos 53°$

$\sum \overrightarrow{Fy} = 0$

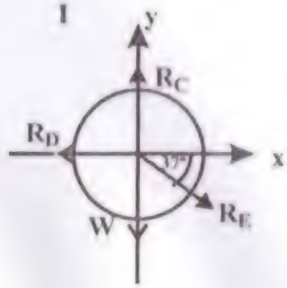
$R_B \operatorname{sen} 53° + R_E \operatorname{sen} 37° - R_F \operatorname{sen} 53° - W = 0$

$\dfrac{(4)}{(3)} \quad \dfrac{R_E \operatorname{sen} 37°}{R_E \cos 37°}$

$= \dfrac{w + (1{,}25W)0{,}8 - 0{,}8R_B}{0{,}6RB - (1{,}25W)\ 0{,}6}$

$\underline{R_B = 2{,}05\ W}$ $\qquad (3)\ R_E = \dfrac{(2{,}05W - 1{,}25W) \cos 53°}{\cos 37°}$

$\underline{R_E = 0{,}6\ W}$



$\sum \overrightarrow{Fx} = 0$

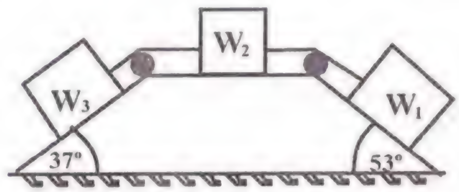
(5) $R_E \cos 37° = R_D \qquad R_D = 0{,}75W$

$\sum \overrightarrow{Fy} = 0$

(6) $R_C - R_E \operatorname{sen} 37° - W = 0$

$\underline{R_C = 1{,}36 W}$

En el sistema de la figura, determinar el valor de W_3, si el sistema está a punto de moverse hacia la derecha.
$W_1 = W_2 =$ 100 N. El coeficiente de rozamiento entre todas las superficies en contacto es igual a 0,25

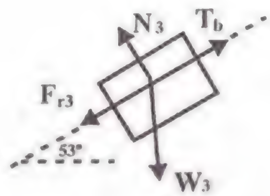


$\sum \overrightarrow{Fy} = 0$

$N_1 = W_3 \cos 37°$

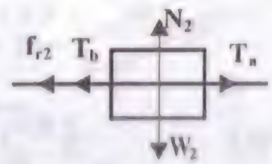
$\sum \overrightarrow{Fx} = 0$

(3) $Tb - W_3 \text{ sen } 37° - Fr_3 = 0$



$\sum \overrightarrow{Fy} = 0$

$N_2 = W_2$

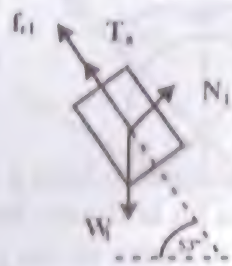


$\sum \overrightarrow{Fx} = 0$

(2) $Ta - Tb - Fr_2 = 0$

$\sum \overrightarrow{Fy} = 0$

$N_1 = W_1 \cos 53°$



$\sum \overrightarrow{Fx} = 0$

(1) $W1 \text{ sen } 53° - Ta - Fr_1 = 0$

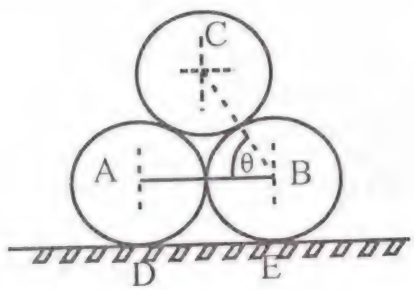
(1) + (2) =(3) $W_1 \text{ sen } 53° - W_3 \text{ sen} 37° - u\,(N_1 + N_2 + N_1) = 0$

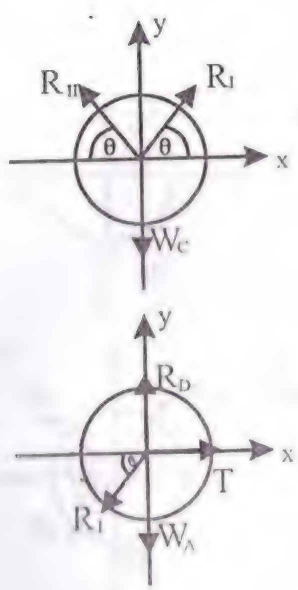
$W_1 = W_2$

$$W_3 = \frac{W_1(\text{sen}53° - 0{,}25 \cos 53° - 0{,}25)}{\text{sen } 37° + 0{,}25 \cos 37°} = 0{,}5\, W_1 = 50 \text{ N.}$$

Dos cilindros lisos, cada uno de peso W = 100 N, y de radio 15 cm, están conectados sus centro por medio de una cuerda AB de longitud 40 cm., y descansando sobre un plano horizontal sin rozamiento. Un tercer cilindro, también liso, se coloca encima de los dos anteriores como se indica en la figura, su peso es 200 N y su radio 15 cm.

Determinar:
a) La tensión en la cuerda.
B) Las fuerzas ejercidas sobre el piso en los puntos de contacto D y E.





$\Sigma \overrightarrow{Fx} = o$
$R_I \cos 53{,}13^o = R_{II} \cos 53{,}13$
$R_I = R_{II}$

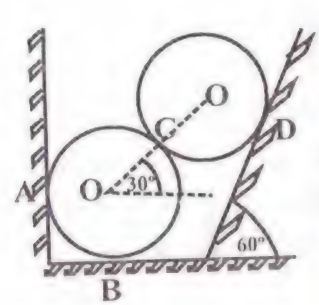
$\Sigma \overrightarrow{Fy} = o$
$2\, R_I \text{ Sen } 53{,}13^o = Wc \quad R_I = R_{II} = 125$ N

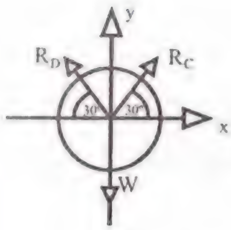
.1 $\Sigma \overrightarrow{Fx} = o$
$T = R_I \cos 53{,}13^o = 75$ N

.2 $\Sigma \overrightarrow{Fy} = o$
$R_D - R_I \text{ Sen } 53{,}13^o - W_A = 0$

$R_D = R_E = 200$ N

4.- Dos esferas totalmente lisas e idénticas, cada una de peso 100 N, están apoyadas como se indica en la figura. Suponiendo que las paredes son lisas, determinar las reacciones producidas en los puntos de apoyo A, B, C, D. La línea que une los centros de las esferas forma con la horizontal un ángulo de 30º.



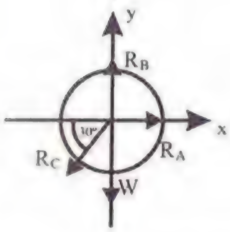


$\Sigma \overrightarrow{Fx} = o$

$R_C \cos 30° - R_D \cos 30° = 0 \; ; \; R_C = R_D$

$\Sigma \overrightarrow{Fy} = o$

$2\, R_C \operatorname{sen} 30° = W \; ; \; R_C = R_D = W = 100 \text{ N}$



$\Sigma \overrightarrow{Fx} = o$

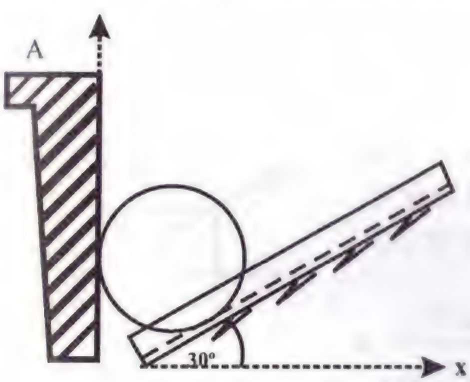
$R_A - R_C \cos 30° = 0 \quad R_A = 87 \text{ N}$

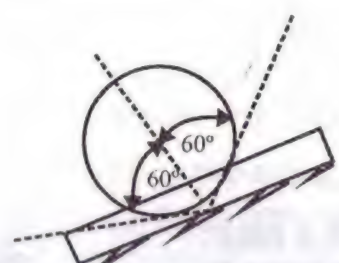
$\Sigma \overrightarrow{Fy} = o$

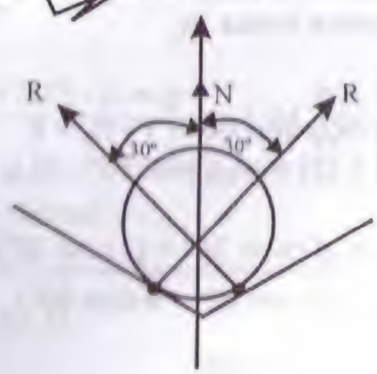
$R_B - R_C \operatorname{sen} 30° - W = 0$

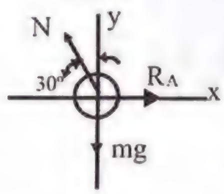
$R_B = 143{,}5 \text{ N}$

Una esfera homogénea lisa de masa m descansa sobre una acanaladura en V y no pueden rodar a causa del contacto que tiene con la superficie vertical lisa A, que es normal al plano x - y de simetría. Determinar la expresión de la fuerza de contacto R entre la esfera y cada cara de la acanaladura.









$\Sigma \overrightarrow{Fy} = o$

$N. \cos 30° = mg$

$$N = \frac{mg}{\cos 30°} \quad (1)$$

$\Sigma \overrightarrow{Fp} = o$

$N - R \cos 30° - R \cos 30° = 0$

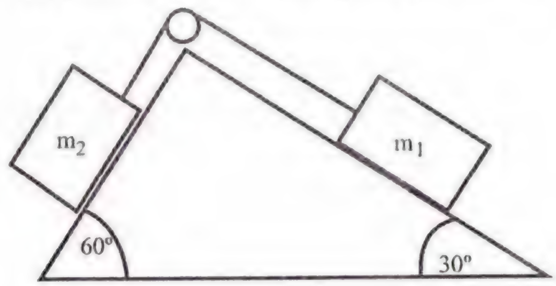
$N = 2\, R \operatorname{Cos} 30°$

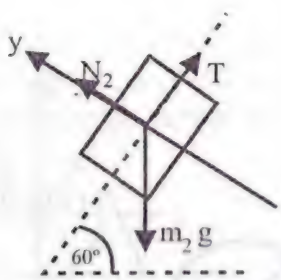
$$R = \frac{N}{2 \cos 30°} \quad (2)$$

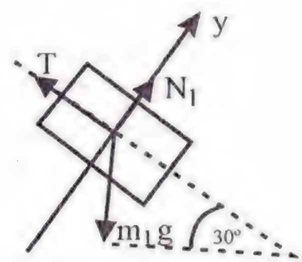
(1) en (2)

$$R = \frac{mg}{2 \cos^2 30°} = \frac{mg}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \quad R = 2/3 \text{ mg.}$$

6.- Sobre un plano inclinado se encuentra un bloque $m_1 = 100$ Kg. que está unid
por medio de un cable a otro de masa m_2 como se indica. Si el coeficiente únic
de rozamiento entre cada bloque y el plano es 0,25; determinar los valor
extremos de m_2, entre los cuales debe variar para que exista equilibrio.







$\lesssim \overrightarrow{Fy} = o$

$N_2 = m_2 g \cos 60^\circ$

m_2 tiende a bajar:
. máxima masa m_2

$\lesssim \overrightarrow{Fx} = o$

(1) $m_2 g$ sen $60^\circ - T - fr_2 = 0$

(1) + (2) = $m_2 g$ sen $60^\circ - m_1 g$ sen $30^\circ - \mu (N_1 + N_2) = 0$

$$m_2 = \frac{m_1 \cancel{g} (\text{sen } 30^\circ + \mu \cos 30^\circ)}{\cancel{g} (\text{sen } 60^\circ - \mu \cos 60^\circ)} = 96{,}69 \text{ Kg.}$$

m_2 tiende a subir:
. mínima masa m_2

$\lesssim \overrightarrow{Fx} = o$ $\lesssim \overrightarrow{Fx} = o$

(3) $m_1 g$ sen $30^\circ - T - fr_1 = 0$ (4) $T - m_2 g$ sen $60^\circ - fr_2 = 0$

(3) + (4) $m_1 g$ sen $30^\circ - m_2 g$ sen $60^\circ - \mu (N_1 + N_2) = 0$

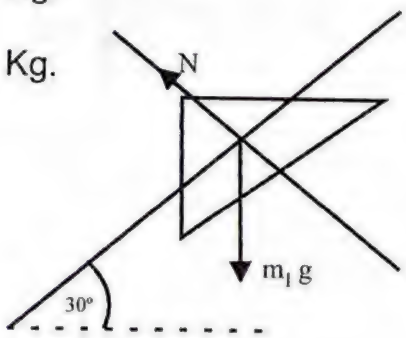
$$m_2 = \frac{m_1 (\text{sen } 30^\circ - \mu \cos 30^\circ)}{\text{sen } 60^\circ + \mu \cos 60^\circ} = 28{,}61 \text{ Kg.}$$

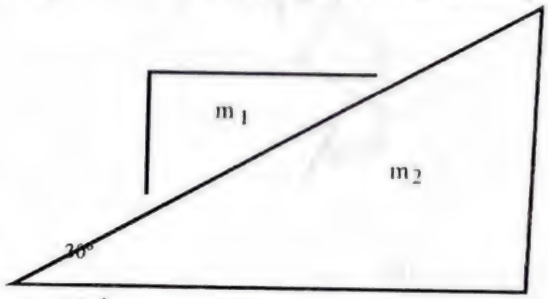
Solución 28, 61 Kg. $\lesssim$ m $\gtrsim$ 96,69 Kg.

7.- En la figura, cual es el valor de la fuerza que hace el bloque m_1 sobre el bloque m_2 .

$m_1 = 3$ Kg.

$m_2 = 6$ Kg.





$\Sigma \vec{Fy} = o$

$N - m_1 g \cos 30° = 0$

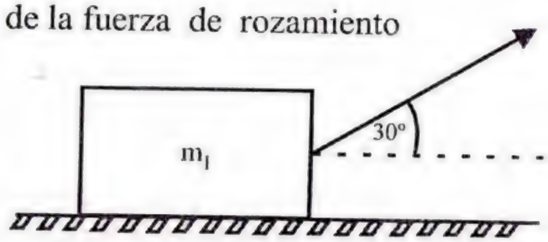
$N = m_1 g \cos 30°$

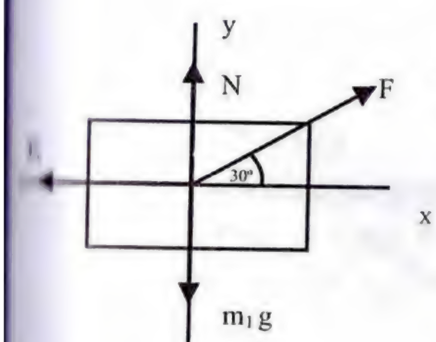
8.- En el sistema de la figura determinar el valor de la fuerza de rozamiento

$m_2 = 5$ Kg.

$u = 0,6$

F = 20 N.





$\Sigma \vec{Fy} = o$

$F \text{ sen } 30° + N = m_1 g$

(1) $N = m_1 g - F \text{ sen } 30°$

$\Sigma \vec{Fy} = o$

(2) $F \cos 30° - \mu N = m_1 a$

$$a = \frac{F(\cos 30° + \mu \text{ sen } 30°) - \mu\, m_1 g}{m_1} = -1{,}34 \text{ m/s}^2$$

$a < 0$ Cuerpo en reposo

$\Sigma \vec{Fx} = o$

f roz. = $F \cos 30° = 17{,}32$ N

9.- En el sistema mostrado en la figura. Determinar:

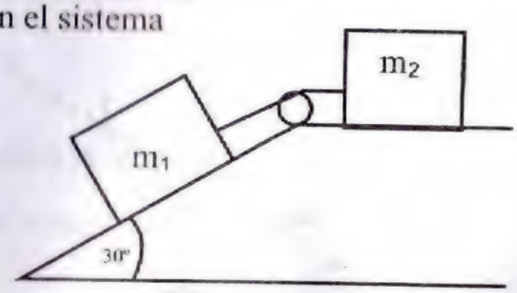
a) El valor de la aceleración.

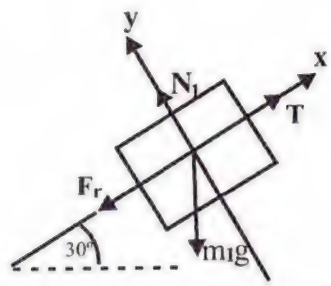
b) El valor de la fuerza de rozamiento total en el sistema

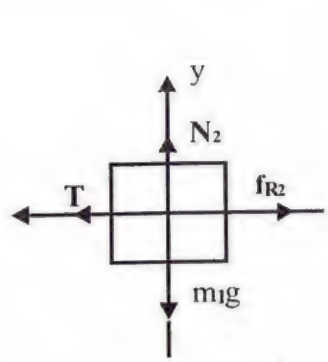
$m_1 = 10$ kg.

$m_2 = 5$ kg.

$u = 0,5$







$\sum \vec{F_y} = 0$

$N_1 = m_1 g \cos 30^\circ$

$\sum \vec{F_x} = 0$

(1) $m_1 g \text{ sen } 30^\circ - \mu\, m_1 g \cos 30^\circ - T = m_1 a$

$\sum \vec{F_y} = 0$

$N_2 = m_2 g$

$\sum \vec{F_x} = m_2 a$

(2) $T - \mu\, m_2 g = m_2 a$

(1) + (2)= $m_1 g \text{ sen } 30^\circ - \mu\, m_1 g \cos 30^\circ - \mu\, m_2 g = a\,(m_1 + m_2)$

$a = -1{,}22 \text{ m/s}^2$.

$a < 0$ Sistema en reposo $a = 0 \ (\text{m/s}^2)$

.2 f rozt = $m_1 g \text{ sen } 30^\circ = 50$ N

0.- En el sistema de la figura. Determinar y demostrar:

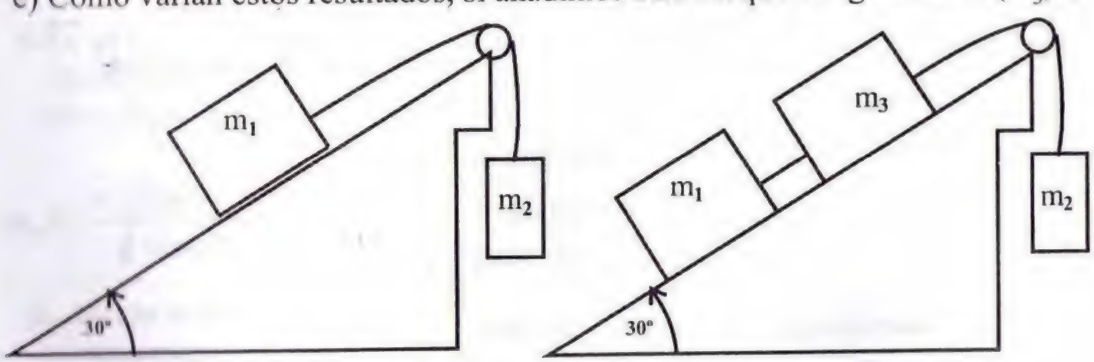
a) Si el sistema está o no en equilibrio.

b) Si no lo está, la aceleración de los cuerpos.

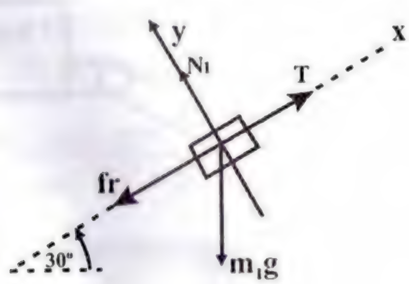
c) En que sentido se moverá el sistema. Por qué?

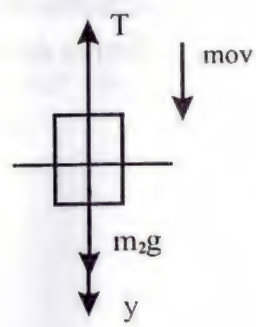
d) La tensión de la cuerda

e) Como varían estos resultados, si añadimos otro bloque de igual masa (m_3).



m1 = m2 = m3 = 8 kg.





a) $\sum \vec{Fy} = 0$

$N_1 = m_1 g \cos 30^o$

$\sum \vec{Fx} = 0$

$T - fr - m_1 g \text{ sen } 30^o = 0$ (1)

$\sum \vec{Fy} = 0$

$T = m_2 g$

reemplazando (2) en (1)

$m_2 g - \mu m_1 g \cos 30^o - m_1 g \text{ sen } 30^o = 0$

(8) (10) - 0,25 (8) (10)0,866

- (8) (10) 0,5 = 0

22,68 (N) =0 $\therefore$ el sistema no se mueve

b) Suponemos sentido del movimiento a la derecha.

$\sum \vec{Fy} = 0$

$N_1 = m_1 g \cos 30^o$

$\sum \vec{Fx} = 0$

$T - fr - m_1 g \text{ sen } 30^o - m_1 a$ (1)

$\sum \vec{Fy} = 0$

$m_2 g - T = m_2 a$ (2)

sumamos (1) y (2)

$m_2 g - fr_1 - m_1 g \text{ sen } 30^o = m_1 a + m_2 a$

$m_2 g - \mu m_1 g \cos 30^o - m_1 g \text{ sen } 30^o = a (m_1 + m_2)$

(8) (10)- (0,25) (8) (10) 0,866 - (8)(10) 0,5 = a (8+8)

$a = 1{,}4175 \text{ m/s}^2$

c) El movimiento es hacia la derecha pues a es positiva.

d) $T = m_2 g - w_2 a$

$T = (8)\ 10 - (8)\ 2{,}835/2$

$T = 68{,}66$ N

f) Suponemos el sentido de movimiento hacia la izquierda:

$\sum \vec{Fy} = 0$ $N_1 = m_1 g \cos 30^o$ $N_3 = m_3 g \cos 30^o$

$\sum \vec{Fy} = m_2 a$ $T_1 - m_2 g = m_2 a$ (I)

$\lesssim Fx = m_1a = -T_1 + m_1g$ sen $30^o - \mu\ m_1g \cos 30^o$ (2)

$\lesssim Fx = m_3a = T + m_3g$ sen $30^o - \mu\ m_3g \cos 30^o - T_1$ (3)

Sumamos(1), (2) y (3), y si $m_1 = m_2 - m_3$ tenemos:

$$a = \frac{2\,(10)0{,}5 - 2\,(0{,}25)\,0{,}866 - 10}{3}$$

$+3\cancel{m}a = 2\cancel{m}g$ sen $30^o - 2\mu\cancel{m}g \cos 30^o\ \cancel{m}\cancel{g}$

$a = -\,0{,}1443\ m/s^2$

Suponemos el sentido de movimiento hacia la derecha:

$\lesssim Fy = 0 \qquad N = mg \cos 30^o$

$\lesssim Fx = m\ .\ a$

$m\ .\ a = T -$ mgsen $30^o - mg \cos 30^o$

$m\ .\ a = T_1 - \mu mg \cos 30^o - mg$ sen $30^o - T$ (3)

$\lesssim Fy = m\ .\ a$

$m\ .\ a = mg - T_1$ (3)

Sumamos (1), (2) y (3)

$3\ \cancel{m}a = \cancel{m}g - 2\cancel{m}g$ sen$30^o - 2\mu\ \cancel{m}g \cos 30^o$

$$a = \frac{10 - 2(10)\ 0{,}5 - 2(10)\ 0{,}866\ (0{,}25)}{3}$$

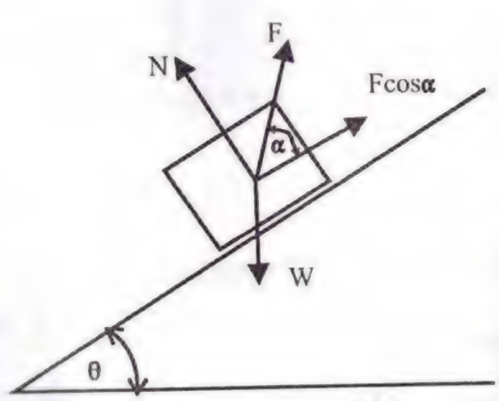
$a = -0{,}1443\ m/s^2$

Si en los dos sentidos a es negativo entonces el sistema está en equilibrio

11.- El coeficiente de rozamiento único entre el bloque de peso W y el plano inclinado es μ determinar el valor de la fuerza F para que el cuerpo.

a) suba con velocidad constante.

b) baje con aceleración constante.



a) $\sum Fy = 0$

$N + F \operatorname{sen} \alpha - mg \cos \theta = 0$

$N = mg \cos \theta - F \operatorname{sen} \alpha$

$\sum Fx = 0$

$F \cos \alpha - mg \operatorname{sen} \theta - fr = 0$

$F \cos \alpha - mg \operatorname{sen} \theta - u\,(mg \cos \theta - F \operatorname{sen} \alpha) = 0$

$F \cos \alpha - mg \operatorname{sen} \theta - u\,(mg \cos \theta - u\,F \operatorname{sen} \alpha) = 0$

$F\,(\cos \alpha - mg \operatorname{sen} \alpha) = mg(\operatorname{sen} \theta + u \cos \theta)$

$$F = mg \;\frac{\operatorname{sen} \theta + u \cos \theta}{\cos \alpha + u \operatorname{sen} \alpha}$$

b) $\sum Fy = 0$

$N + F \operatorname{sen} \alpha - mg \cos \theta = 0$

$N = mg \cos \theta - F \operatorname{sen} \alpha$

$\sum Fx = m\,.\,a$

$mg \operatorname{sen} \theta - F \cos \alpha - fr = m\,.\,a$

$mg \operatorname{sen} \theta - F \cos \alpha - u(mg \cos \theta - F \operatorname{sen} \quad) = m\,.\,a$

$mg \operatorname{sen} \theta - F \cos \alpha - u\, mg \cos \theta - uF \operatorname{sen} \quad = m\,.\,a$

$F\,(u \operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha) = ma + mg\,(u \cos \theta - \operatorname{sen} \theta)$

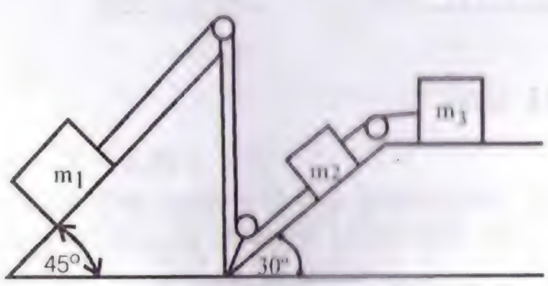
$$F = \frac{ma + g(u \cos \theta - \operatorname{sen} \theta)}{u \operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha}$$

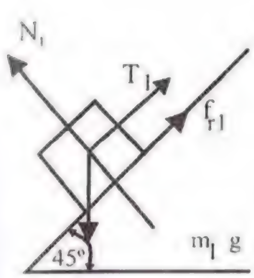
12.- En el sistema de la figura el valor del coeficiente de fricción es 0,8; determine el valor de la aceleración.

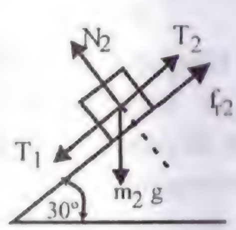
$m_1 = 10$ Kg.

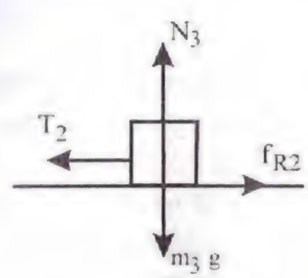
$m_2 = 15$ Kg.

$m_3 = 30$ Kg.









$\Sigma Fy = o$

$N_1 - m_1 g \cos 45^o = 0$

$N_1 = m^1 g \cos 45^o$

$\Sigma Fx = m_1 . A$

$-fr_1 + m_1 g \operatorname{sen} 45^o - T_1 = m_1 . a$ (1)

$m_1 g \operatorname{sen} 45^o - u m_1 g \cos 45^o - T_1 = m_1 .a$ (1)

Todas las partículas tienen igual aceleración ya que se desplazan una misma distancia en un mismo intervalo de tiempo.

$\Sigma Fy = o$

$N_2 = m_2 g \cos 30^o$

$\Sigma Fx = m_2 . a$

$m_2 g \operatorname{sen} 30^o - u\, m_2 g \cos 30^o + T_1 - T_2 = m_2 a$ (2)

$m_2 g \operatorname{sen} 30^o + T_1 - T_2 - u\, m_2 g \cos 30^o = m_2 a$

$\Sigma Fy = 0$

$N_3 - m_3 g = 0$

$N_3 = m_3 g$

$\Sigma Fx = m_3 a$

$T_2 - fr_3 = m_3 a$

$T_2 - u\, m_3 g = m_3 a$ (3)

Suman las ecuaciones (1), (2)y (3)

$m_1 g \operatorname{sen} 45^o = m_2 g \operatorname{sen} 30^o - u\, m_1 g \cos 45^o - u\, m_2 g \cos 30^o - u\, m_3 g$
$= (m_1 + m_2 + m_3)\, a$

$$a = \frac{m_1 g \operatorname{sen} 45^o + m_2 g \operatorname{sen} 30^o - u\, m_1 g \cos 45^o - u m_2 g \cos 30^o - u m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$a = g\, \frac{7{,}07 + 7{,}5 - 0{,}8(7{,}07 + 12{,}99 + 30)}{55}$$

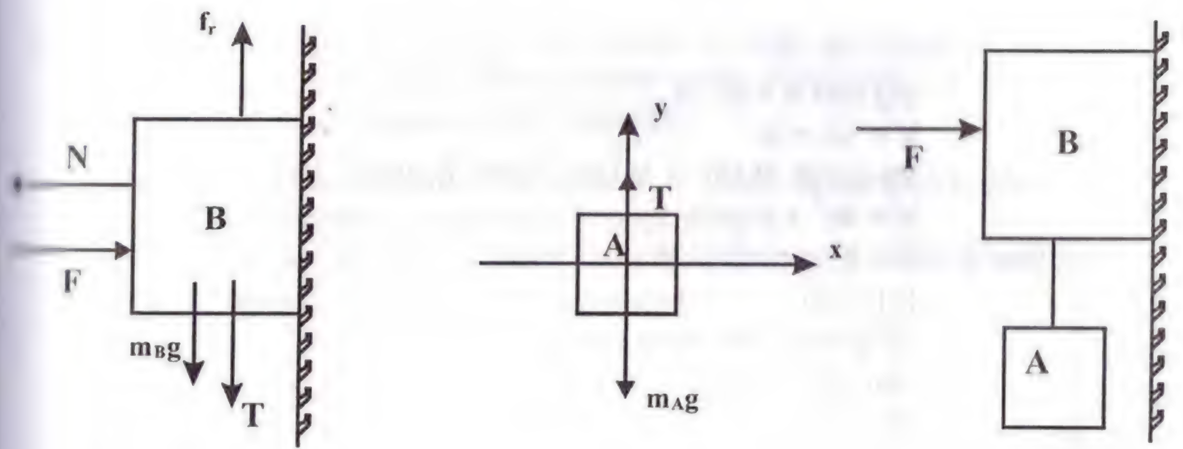
$$a = -4{,}632 \ \text{m/s}^2$$

De aquí concluimos que el sistema está en equilibrio, ya que en este caso no hay otra alternativa respecto al sentido de movimiento ya que el sistema no puede moverse hacia la derecha.

13.- Una fuerza horizontal F empuja el bloque B contra una pared vertical. El bloque pesa 70 N y el bloque A que está unido al B por medio de una cuerda, pesa 15 N. Si el coeficiente de rozamiento entre la pared y el bloque B es 0,5 y F = 40 N Determine:

a) La aceleración con la que bajan los bloques A y B.

b) La tensión en la cuerda



a) $\Sigma Fx = 0$

$N - F = 0 \qquad N = F$

$\Sigma Fy = m_B.a$

$T + m_Bg - fr = m_B\ a$

$T + m_Bg - u\ F = m_Ba \qquad (1)$

$\Sigma Fy = m_A.\ a$

$m_Ag - T = m_A.\ a \qquad (2)$

Sumando las dos ecuaciones:

$m_Ag + m_Bg - u\ F = (m_A + m_B).a$

$$a = \frac{m_Ag + m_Bg - uF}{m_A + m_B}$$

$$a = \frac{70\ N + 15\ N - 0{,}5\ .\ 40\ N}{8{,}5\ Kg.}$$

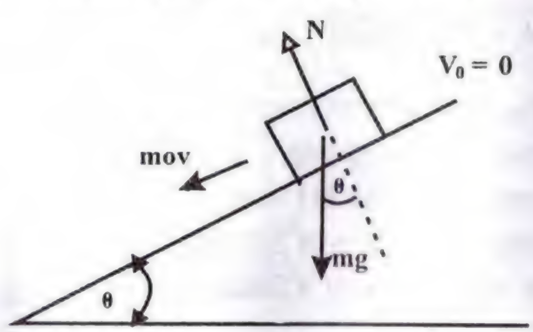
$$a = \frac{6{,}5\ Kg\ m/s^2}{8{,}5\ Kg} = 7{,}65\ m/s^2$$

b) Reemplazando en la ecuación (2)

$T = m_Ag - m_Aa$

$T = 15(N) - 1{,}5Kg\ .\ 7{,}65\ m/s2 \qquad T = 3{,}525\ (N)$

14.-Un cuerpo tarda 8 segundos en desplazarse por un plano inclinado de longitud 25 metros. Si el cuerpo parte del reposo encontrar la inclinación del plano inclinado.



$\Sigma Fx = m \cdot a$

$\cancel{m} g \text{ sen } \theta = \cancel{m} \cdot a$

$V = Vo + at$

$V = g \text{ sen } \theta \ (8) \qquad V^2 = g^2 \text{sen}^2 \theta \ (64) \qquad (1)$

$V^2 = Vo^2 + 2 ad$

$V = 2 (g \text{ sen} \theta) \ 25 \qquad (2)$

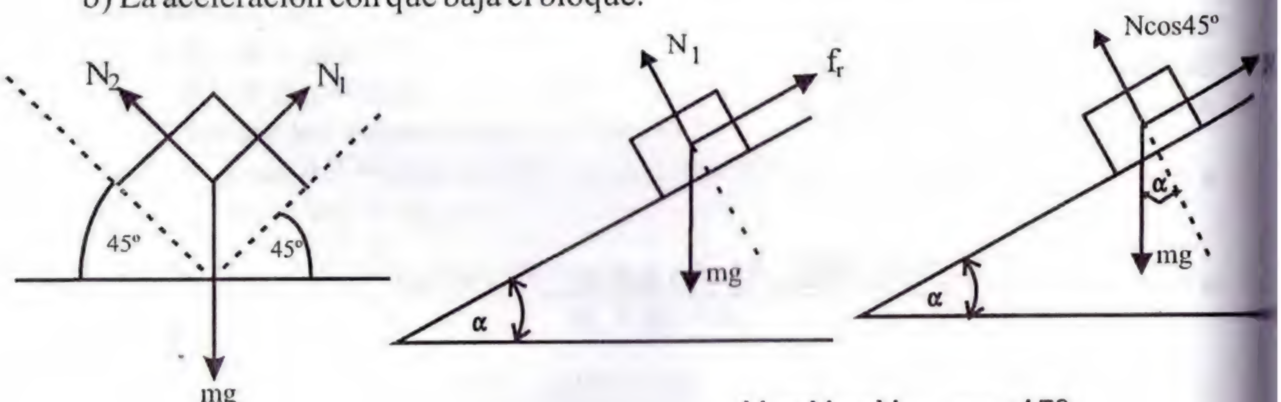
$(1) = (2)$

$64 g^2 \text{sen}^2 \theta = 50 g \text{ sen } \theta$

$\text{sen } \theta = 0{,}0781$

$\theta = 4{,}48°$

15.- Un bloque cúbico de masa m baja sobre una canaleta de paredes perpendiculares e inclinada un ángulo α, como se indica en la figura. Si el coeficiente de rozamiento entre el bloque y las paredes de la canaleta es "u".
Determinar:
a) El valor de la reacción de cada una de las paredes sobre el bloque.
b) La aceleración con que baja el bloque.



$N_1 = N_2 = N_T \cdot \cos 45°$

a) $\Sigma Fy = 0$

$N - mg \cos \alpha = 0$

$N - mg \cos \alpha$

$N_1 = N_2 = mg \cdot \cos\alpha \cos 45°$

$N_1 = N_2 = (\sqrt{2/2}) \ mg \cos\alpha$

b) $\Sigma Fx = m \cdot a$

$mg \text{ sen } \alpha - 2fr = m \cdot a$

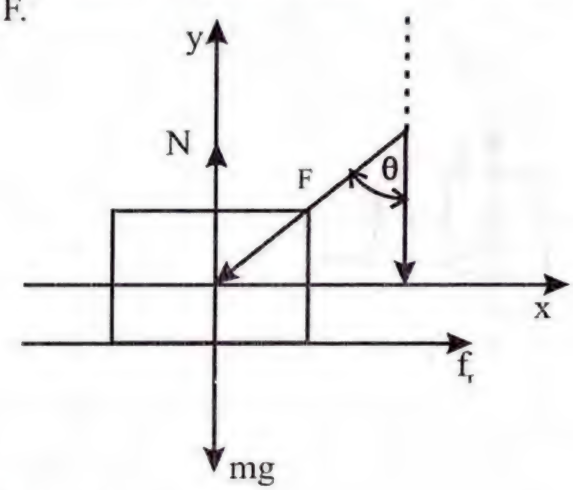
$mg \text{ sen } \alpha - 2u \ N1 = m \cdot a$

$\cancel{m} g \text{ sen } \alpha - 2 \ u \ (\sqrt{2}/2) \ \cancel{m} g \cos\alpha = \cancel{m} \cdot a$

$a = g (\text{sen } \alpha - u \sqrt{2} \ \cos \alpha)$

16.- La manija (palo) de un trapeador de pisos de masa m forma un ángulo θ con la vertical. Si el coeficiente de rozamiento entre el trapeador y el piso es "u", y la masa de la manija es despreciable. Calcular:

a) La magnitud de la fuerza F dirigida a lo largo de la manija para empujar el trapeador, a velocidad constante, a lo largo del piso.
b) Demuestre y calcule que existe un ángulo crítico θ_o para el cual no se puede mover el trapeador por más grande que sea F.



a) $\Sigma Fy = 0$
$N - F\cos\theta - mg = 0$
$N = mg + F\cos\theta$

$\Sigma Fy = 0$
$F\text{sen}\,\theta - fr = 0$
$F\text{sen}\,\theta - u\,N = 0$
$F\text{sen}\,\theta - u\,(mg + F\cos\theta) = 0$
$F\text{sen}\,\theta - u\,mg + uF\cos\theta = 0$

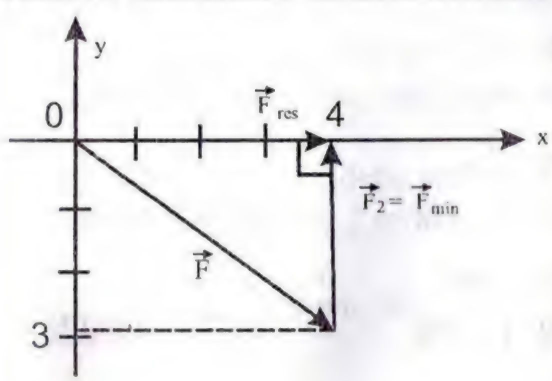
$$F = \frac{u\,mg}{\text{sen}\,\theta - u\cos\theta} \quad ①$$

b) Si el sumatorio sigue siendo igual a cero para cualquier valor de F el denominador de la expresión (1) es igual a cero.

$\text{sen}\,\theta - u\cos\theta = 0$
$\text{tg}\,\theta = u$

Si θ corresponde a esta expresión, a mayor ángulo el trapeador no se moverá aunque el valor de la fuerza aumenta hasta el infinito.

17.- Una persona hala de un objeto con una fuerza dada por el vector $\vec{F} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ N. Determinar la mínima fuerza $\vec{F}$ que debe hacer otra persona para que el objeto se mueva únicamente en dirección Este.



$\vec{F} = (\vec{4i} - \vec{3j})$ N

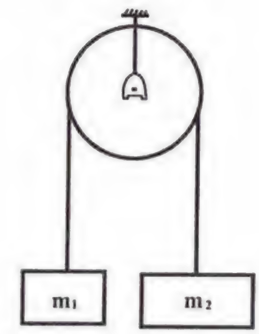
$\vec{F} + \vec{F}min + \vec{F}$ res. (este)

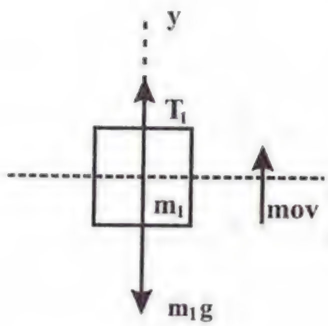
$\vec{F}$ min $= \vec{3j}$ N.

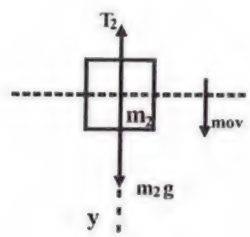
18.- Calcular la aceleración de las masas m_1 y m_2, así como también la tensión en la cuerda del sistema que se indica en la figura.

$m_1 = 7$ Kg.

$m_2 = 9$ Kg.







$\Sigma F_y = m_1 a$ $\qquad\qquad$ $\Sigma F_y = m_2 a$

(1) $T - m_1 g = m_1 a$ $\qquad\qquad$ (2) $m_2 g - T = m_2 a$

$$(1) + (2) \quad a = \frac{g\,(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} = 1{,}25 \text{ m/s}^2$$

$$(1) \rightarrow T = m_1\,(a + g) \quad = 78{,}75 \text{ N}$$

9.- La masa de un ascensor es 500Kg. Calcular la tensión que soporta el cable del ascensor en cada uno de los siguientes casos:

a) Se encuentra en reposo.

b) Tiene una aceleración hacia arriba de 2 m/s^2.

c) Tiene una aceleración hacia abajo de 2 m/s^2.

a) $\Sigma F_y = 0$

$T = mg$ $\qquad$ a) T = <u>5000 N</u>

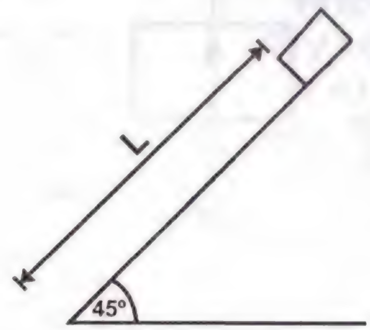
mov↑ b) $\Sigma F_y = ma$

$T - mg = ma$ $\qquad$ b) T = <u>6000 N</u>

mov↓ c) $\Sigma F_y = ma$

$mg - T = ma$ $\qquad$ c) T = <u>4000 N</u>

20.- Un bloque de masa m resbala en un plano inclinado que forma un ángulo de 45° sobre la horizontal en un tiempo que es el doble del que se tarda en resbalar por un plano de la misma longitud pero sin razonamiento que también forma 45° con la horizontal. Determine el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano.



Sin rozamiento: $\Sigma Fx = ma$

$mg \text{ sen } 45^o = ma_1$

$a_1 = g \text{ Sen } 45^o$

(1) $L = V_o\, t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{1}{2} g \text{ sen } 45\, t_1^2$

Con rozamiento: $\Sigma Fx = ma$

$\cancel{m}g \text{ sen } 45^o - u \cancel{m} g \cos 45^o = \cancel{m}a_2$

$a_2 = g(\text{sen } 45^o - u \cos 45^o)$

(2) $L = Vo\, t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = \frac{1}{2} g (\text{sen } 45^o - u \cos 45^o)(2t_1)^2$

(1) = (2)

$L = \frac{1}{2} \cancel{g} \text{ sen } 45^o\, t_1^2 = \frac{1}{2} \cancel{g} (\text{sen } 45^o - u \cos 45^o)\, 4t_1^2$

$u = \frac{3}{4} \text{ tg } 45^o$; $u = \frac{3}{4}$

21.- Un peso de 125N descansa en el piso y está unido a un resorte de constante elástica igual a 60 N/cm. Este resorte a su vez se une a una cuerda a la que se le aplica una fuerza vertical de 40 N.

a) Se levanta el peso de 125 N. del piso?

b) Si no se levanta; indicar el valor de la reacción del piso sobre el bloque considerado.

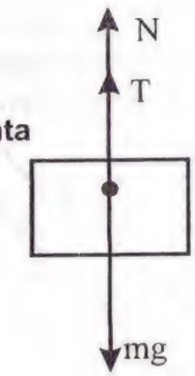
c) Qué fuerza se debe aplicar para que el bloque de 125 N. suba con una aceleración de 2 m/s^2?

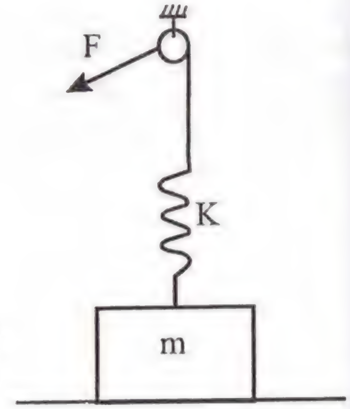
El resorte es un elemento flexible, por tanto solo transmite la acción de la fuerza aplicada.

a) Como $F < mg$

$40\ N < 125\ N$

El cuerpo no se levanta



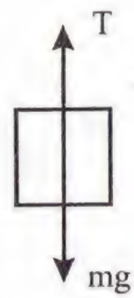


b) $\Sigma Fy = 0$

$F + N = mg$

$N = mg - F$

$N = 85\ N$



c) $\Sigma Fy = ma$

$F - mg = m \cdot a$

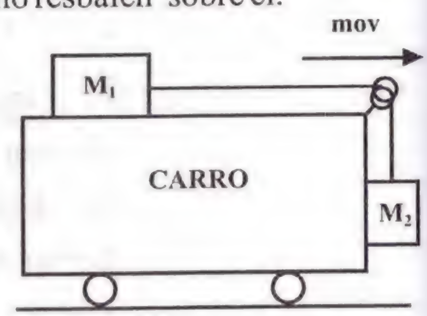
$F = m(a + g)$

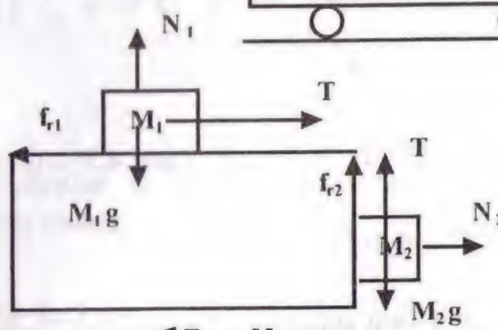
$F = 150\ N$

22.- Entre que límites deben estar las aceleraciones comunicadas al carro de la figura para que los bloques de masas M_1 y M_2 no resbalen sobre él.

u_1= Coeficiente de rozamiento entre el bloque M_1 y el carro

u_2= Coeficiente de rozamiento entre el bloque M_2 y el carro





Valor mínimo de aceleración (a)

$\Sigma Fy = 0$

$M_2g - T - fr_2 = 0$

$\Sigma Fx = M_2 \cdot a$

$N_2 = M_2 \cdot a$

$M_2 g - T - uM_2a = 0$ (I)

$\Sigma Fy = 0$

$N_1 = M_1g$

$\Sigma Fx = M_1a$

$T - fr_1 = M_1 a_1$

$T - u_1 M_1 g = M_1a_1$ (II)

Sumando (II) y (I)

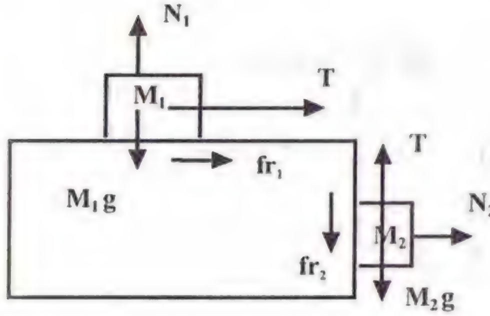
$M_2g - u_1 M_2 g - u_2 M_2 a = M_1 a$

$$a_1 = a_{min} = \frac{g(M_2 - u M_1)}{u_2 M_2 + M_1}$$

Valor máximo de aceleración (a)

$\Sigma Fy = 0$

$T - fr_2 - M_2g = o$



$\Sigma Fx = M_2a$

$N_2 = M_2a$

$T - u_2\,M_2a - M_2g = 0$ (I)

$\Sigma Fy = 0$

$N_1 = M_1g$

$\Sigma Fx = M_1a$

$T + u_1\,M_1g = M_1a$ (II)

restando (I) de (II)

$u_1\,M_1g + u_2\,M_2g + m_2g = M_1a$

$$a = a_{máx} = \frac{g\,(M_2 + u_1\,M_1)}{M_1 - u_2\,M_2}$$

[illegible].-Sobre un plano inclinado 30º sobre la horizontal, desliza sin rozamiento un cuerpo de masa m_1 , elevando a otro cuerpo de masa m_2 por medio de una cuerda y una polea como se indica en la figura. Se observa que m_2 se eleva 245,25 metros en 20 segundos partiendo del reposo. Determinar:

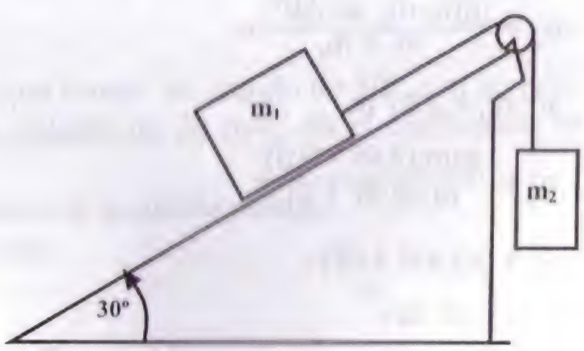
a) La relación m_1/m_2 .
b) Si se invierten las masas, en que sentido se efectuará el movimiento. Y cuál el espacio recorrido en 20 segundos a partir del reposo?

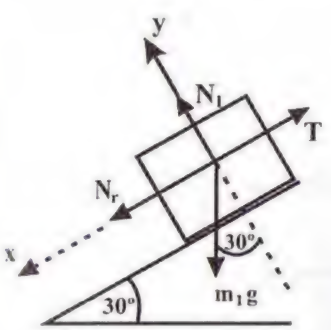
Datos:

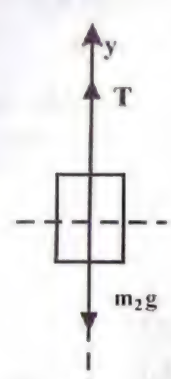
y = 245,25 m.

t = 20 seg

Vo = o







cálculo de la aceleración del deslizamiento

$y = Vot + (\frac{1}{2})\, a\, t^2$

$245{,}25m = 0 + (\frac{1}{2})\, a\, (20\ seg)^2$

$a = 490{,}3/400 m/s^2 \qquad a = 1{,}226\ m/s^2$

$\Sigma Fx = m_1 \,.\, a \qquad m_1 g\ sen\ 30° - T = m_1 .\, a \quad (I)$

$\Sigma Fy = m_2 \,.a \qquad T - m_2 g = m_2 .\, a \quad (II)$

(I) +(II)

$m_1 g\ sen\ 30° - m_2 g = (m_1 + m_2)\, a$

Dividiendo todo para m_2

$$\frac{m_1}{m_2}\, g\ 0{,}5 - g = \frac{m_1}{m_2}\ 1{,}226 + 1{,}226$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{10 + 1{,}226}{5 - 1{,}226} = 2{,}97$$

Si se invierten las masas el sentido del movimiento será al contrario porque m_1 es mayor que m_2

$\Sigma Fx = m_2 \,.\, a_2$

$T - m_2 g\ sen\ 30° = m_2 \,.\, a_2 (I)$

$\Sigma Fy = m_1 \,.a_2$

$m_1 g - T = m_1 \,.\, A_2 \qquad (II)$

$m_1 g - m_2 g\ sen30° = (m_2 + m_1)\, a_2$

$$a_2 = \frac{g(m_1 - m_2\ sen30°)}{m_1 + m_2}$$

si.: $m_1 = 2{,}97\ m_2$

$$a_2 = \frac{g(m_2(2{,}97 - 0{,}5)}{m_2(2{,}97 + 1)}$$

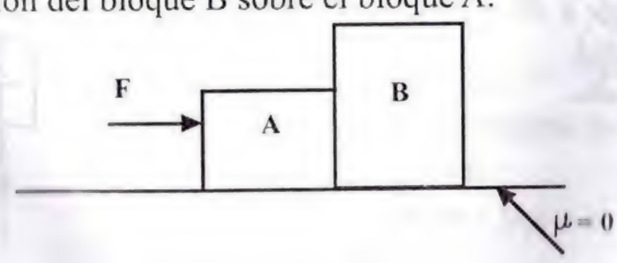
$a_2 = g(2{,}47/\ 3{,}97)$

$a_2 = 6{,}22\ m/s^2$

$y_2 = Vot + (\frac{1}{2})\, a_2 t^2 \qquad y_2 = \frac{1}{2}\ 6.22 \frac{m}{s^2}\ (400s^2)$

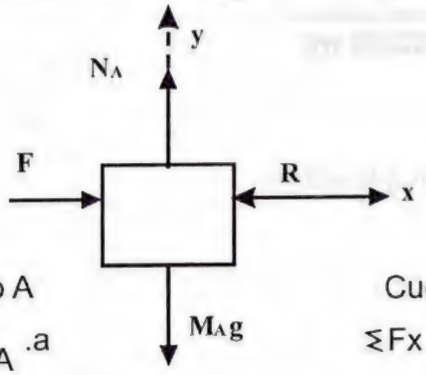
$y_2 = 1245{,}18m.$

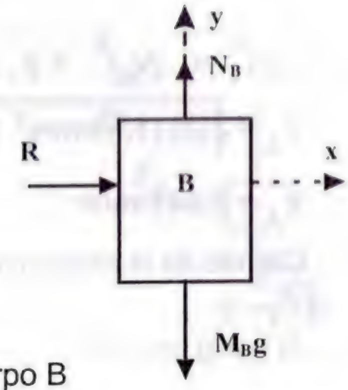
24.- Si al sistema mostrado en la figura se le aplica una fuerza de F = 30 N. Determinar la acción del bloque B sobre el bloque A.



M_A = masa del bloque A = 5 Kg.

M_B = masa del bloque B = 10 Kg.





Cuerpo A

$\Sigma Fx = M_A \, .a$

$F - R = M_A \, . \, a$ (1)

Cuerpo B

$\Sigma Fx = M_B \, .a$

$R = M_B \, .a$ (2)

(1) en (2)

$F - M_B . \; a = M_A \; .a$

$a = \dfrac{F}{(M_A + M_B)}$ $\qquad a = 2(m/s^2)$

$R = MB \, . \, a$

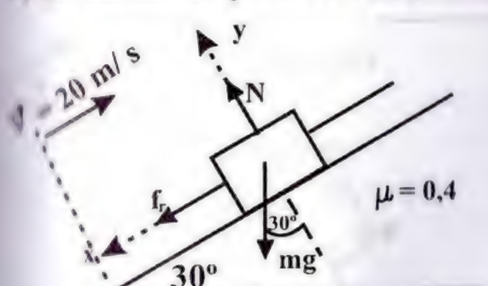
$R = 10 \text{ Kg. } 2 \text{ m/s}^2$

$R = 20$ N.

Desde la base de un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal, se dispara un bloque con una rapidez de 20 m/s. Si el coeficiente de rozamiento es 0,4. Determinar:

a) La velocidad del bloque cuando vuelve al punto de partida.

b) La distancia que recorre sobre el plano.



Cálculo de la aceleración de bajada

$\Sigma Fy = 0 \qquad N = mg \cos 30°$

$\Sigma Fx = m \; . \; a_2$

$\cancel{m}g \text{ sen } 30° - u \, \cancel{m} \, g \cos 30° = \cancel{m} a_2$

$a_2 = g(\text{sen } 30° - 0{,}4 \cos 30°) = 1{,}54 \text{ m/s}^2$

$$(V_A)^2 = (V_B)^2 + 2 \,.\, a_2 \,.\, d$$

$$V_A = \sqrt{(2)\,(1{,}54\ m/s^2)(23{,}69\ m)}$$

$$V_A = 8{,}541\ m/s$$

b) **Cálculo de la aceleración a la subida**

$\sum Fy = 0$

$N = mg \cos 30^\circ$

$\sum Fx = m \,.\, a$

$- mg \text{ sen } 30^\circ - fr = m \,.\, a$

$- mg \text{ sen } 30^\circ - u\, \cancel{m}g \cos 30^\circ = \cancel{m}a$

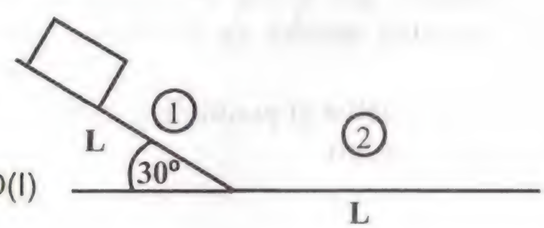
$a = -g\,(\text{sen } 30^\circ + 0{,}4 \cos 30^\circ)$

$a = -8{,}46\ m/s^2$

$(V_B)^2 = (V_A)^2 - 2 \,.\, a \,.\, d$

$$d = \frac{(V_A)^2}{2a} = \frac{(20\ m/s)^2}{2\,.\,(8{,}46\ m/s^2)} = 23{,}69\ m.$$

26.- Un cuerpo desliza primero a lo largo de un plano inclinado y luego continúa moviéndose sobre un plano horizontal. Determinar el coeficiente de rozamiento, si se sabe que el cuerpo recorre en el plano horizontal la misma distancia que en el plano inclinado.



EN EL TRAMO(I)

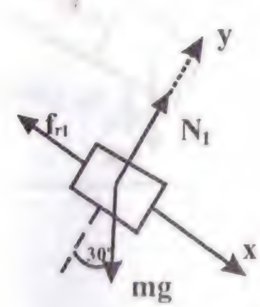
$\sum Fy = 0$

$N = mg \cos 30^\circ$

$\sum FX = m \,.\, a_1$

$mg \text{ sen } 30^\circ - Fr = m \,.\, a$

$\cancel{m}g \text{ sen } 30^\circ - u \,.\, \cancel{m}g \cos 30^\circ = \cancel{m} \,.\, a$



$a_1 = g\,(\text{sen } 30^\circ - u. \cos 30^\circ)$

$V_{f1}^2 = Vo_1^2 + 2\, a_1 L$

$V_{f1}^2 = 2\, g\, L(\text{sen } 30^\circ - u \,.\, \cos 30^\circ) \qquad (I)$

EN EL TRAMO (II)

$\Sigma Fy = 0$

$N_2 = mg$

$\Sigma FX = m\,a_2$

$-Fr_2 = ma_2$

$-u\,\cancel{m}g = \cancel{m}a_2$

$a_2 = -ug$

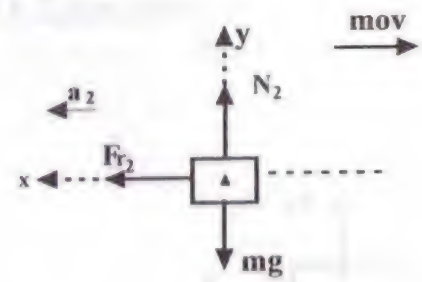
$V^2 f_2 = Vo_2 - 2a_2 L \;; V0_2 = Vf_1$

$0 = Vf_1 - 2\,u\,g\,L \qquad \text{(II)}$

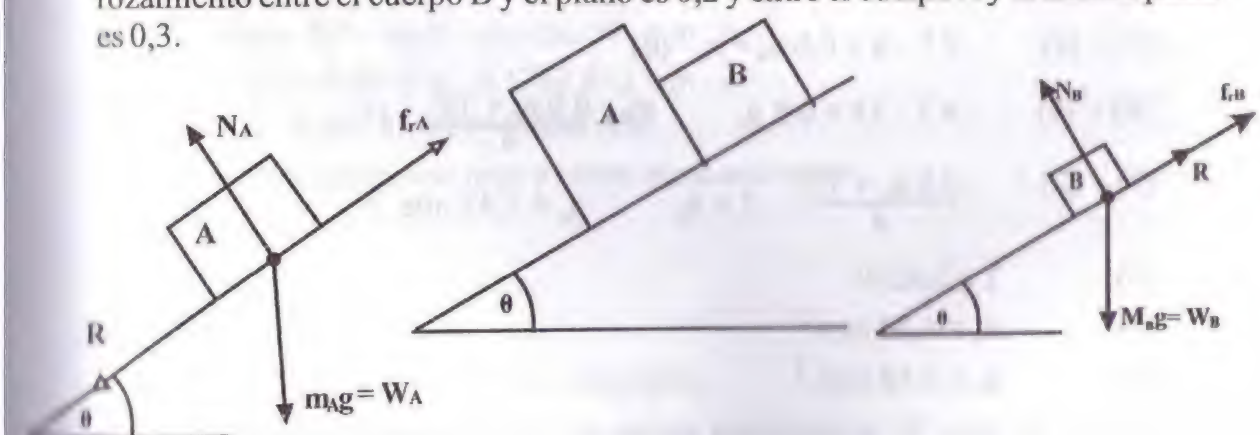
(I) en (II)

$0 = 2\,g\,L\,(\text{sen } 30° - u \cos 30°) - 2\,ugL$

$u = \dfrac{\text{sen } 30°}{(\cos 30° + 1)}\;; \qquad u = 0{,}27$



17.- Los cuerpos A y B de la figura pesan 250 N y 150 N, respectivamente. La plataforma, sobre la que están colocados los cuerpos, gira desde la posición horizontal hasta formar un ángulo θ. ¿Cuál es el ángulo máximo que puede alcanzarse antes de que los cuerpos comiencen a deslizar?. El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo B y el plano es 0,2 y entre el cuerpo A y el mismo plano es 0,3.



$\Sigma Fy = 0$

$N_A = W_A \cos\theta$

$\Sigma Fx = 0$

(I) $W_A \text{ sen}\theta - Fr_A + R = 0$

$\Sigma Fy = 0$

$N_B = W_B \cos\theta$

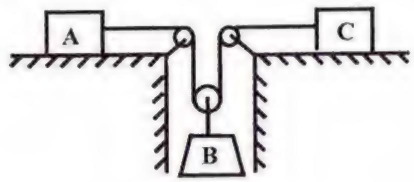
$\Sigma Fx = 0$

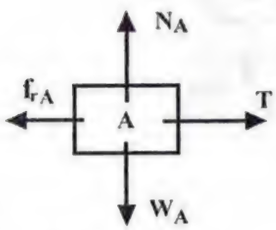
(2) $W_B \text{ sen}\theta - fr_B - R = 0$

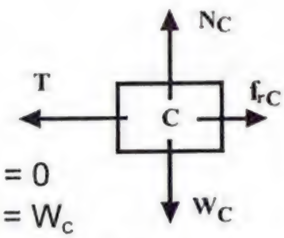
$(1) + (2) = \text{sen}\,\theta\,(W_A + W_B) - \cos\theta\;\;(\mu_A W_A + \mu_B W_B) = 0$

$\dfrac{\text{sen }\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\mu_A W_A + \mu_B W_B}{W_A + W_B} \qquad \theta = 14{,}71°$

8.- Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre los bloques A y C con las superficies horizontales es 0,2. Calcule la aceleración de cada cuerpo si $W_A = 5$ N. $W_B = W_C = 10$ N.







$\Sigma Fy = 0$

$N_A = W_A$

froz . A = uN_A = 1 Nz

$\Sigma Fy = 0$

$N_C = W_C$

froz . C = uN_C = 2 N

$\Sigma Fy = m_B\, a_B$

(3) 10 - 2T= 10/10 ab

$\Sigma Fx = m_A\, a_A$

(1)$T - 1 = \cancel{5} / 1\cancel{0}\, a_A$

$\Sigma Fx = m_C\, a_C$

(2)$T - 2 = 10/10\, a_C$

Además $\dfrac{a_A + a_C}{2} = a_B$ (4)

(4) en (3) $\quad 10 - 2T = \dfrac{a_A + a_C}{2}$ (5)

(1) + (2) $\quad 2T - 3 = 0{,}5\, a_A + a_C$ (6)

(6) - (5) $\quad 4T - 13 = 0{,}5\, a_C \qquad T = \dfrac{0{,}5\, a_C + 13}{4}$ (7)

(7) - (2) $\quad \dfrac{0{,}5\, a_C + 13}{4} - 2 = a_C \qquad a_C = 1{,}42\ m/s^2$

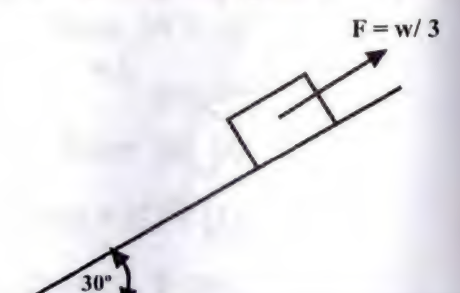
(7) $\quad T = 3{,}42$ N

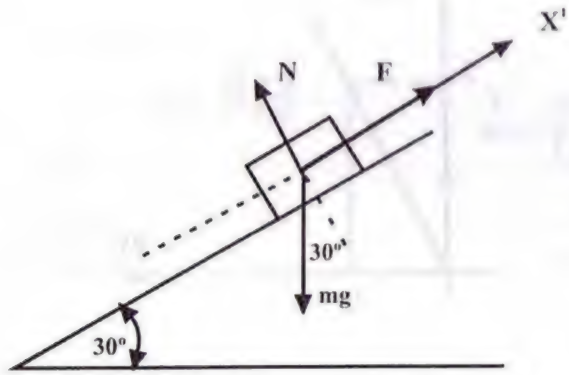
(1) $\quad a_A = 4{,}84\ m/s^2$

(3) $\quad a_B = 3{,}16\ m/s^2$

9.- Un cuerpo de peso W se encuentra sobre un plano inclinado, el coeficiente de rozamiento es 0,2 entre el cuerpo y el plano. Si se aplica una fuerza F = W/3 como se indica en la figura. Determinar:

a) La tendencia del movimiento del bloque.
b) Su aceleración .
c) El valor de la fuerza de rozamiento.





a) Para considerar la tendencia del movimiento encontraremos la fuerza resultante activa (Σ f sin considerar el rozamiento)

$\Sigma Fx' = mg \text{ sen } 30° - mg/3$

$= (\frac{1}{2} - 1/3)\ mg.$

$= (1/6)\ mg.$

el bloque tiende a bajar

b) $\Sigma Fy = 0$

$N = mg \cos 30°$

$\Sigma Fx = m \cdot a$

$mg \text{ sen } 30° - F - fr = m \cdot a$

$mg \text{ sen } 30° - mg/3 - mg \cos 30° = m \cdot a$

$0{,}5\ \cancel{m}\ g - 0{,}33\ \cancel{m}\ g - 0{,}1732\ \cancel{m}\ g = \cancel{m} \cdot a$

$a = 5 - 3{,}33 - 1{,}732 = -0{,}062\ m/s^2$

luego el cuerpo no baja y como no puede subir

$a = 0$

c) $\Sigma Fx < u N$

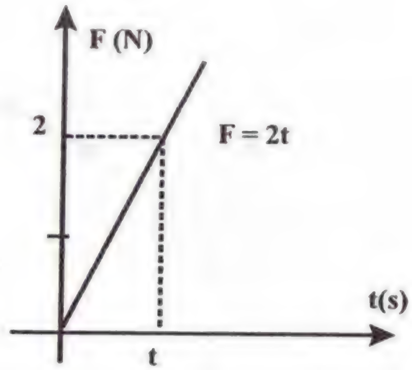
$fr = (1/6)\ mg$ (hacia arriba del plano)

10.- Un bloque de 2,50 Kg está sobre una superficie horizontal; el coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y la superficie es 0,3 y el dinámico 0,25. Se aplica una fuerza variable horizontal F al bloque, que es inicialmente cero y aumenta razón de 2 N/s.

Determinar:

a) Cuando empezará el bloque a moverse.

b) Cual es su aceleración 8 segundos después de haber iniciado su movimiento.



Datos:

m =2,5 Kg.

ue = 0,3

uc = 0,25

El movimiento empezará cuando la fuerza activa iguale al valor de la fuerza de rozamiento máximo.

a) Frmáx = ue. N = F

$\Sigma Fy = 0$

N = mg

$fr_{máx} = 0,3 \cdot 2,5 \cdot 10$

$fr_{máx} = 7,5$ (N)

F = 2 t

7,5 = 2t

t =3,75 (s)

b) F= 2t ; para t= 8 (s)

F = 16(N)

$\Sigma Fy = 0$

N = mg

$\Sigma Fx = m \cdot a$

$F - u_C \cdot N = m \cdot a$

$a = \dfrac{F - u_c \cdot mg}{m}$ $\quad a = 3,9(m/s^2)$

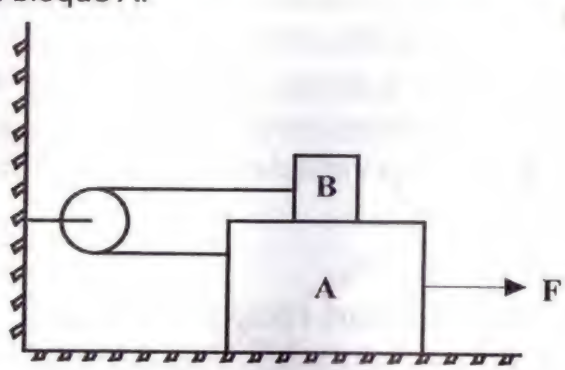
31.- Si el coeficiente de rozamiento entre todas las superficies en contacto es 0,3 (único). Determinar la aceleración del bloque A.

Datos

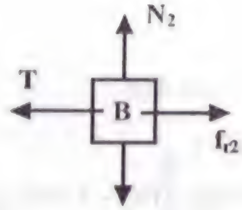
$m_A = 4$ Kg.

$m_B = 2$ Kg.

F = 42 N



En el bloque B

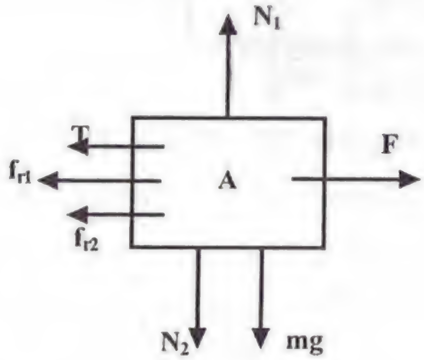


$\sum F_y = 0 \qquad N_2 = m_B\, g$

$\sum F_x = m_B\, a$

$T - fr_2 = m_B\, a \qquad \text{(I)}$

En el bloque A



$\sum F_y = 0$

$N_1 - m_A g - N_2 = 0$

$N_1 = g(m_A + m_B)$

$\sum F_x = m_A\, .a$

$F - T - fr_1 - fr_2 = m_A\, .\, a \qquad \text{(II)}$

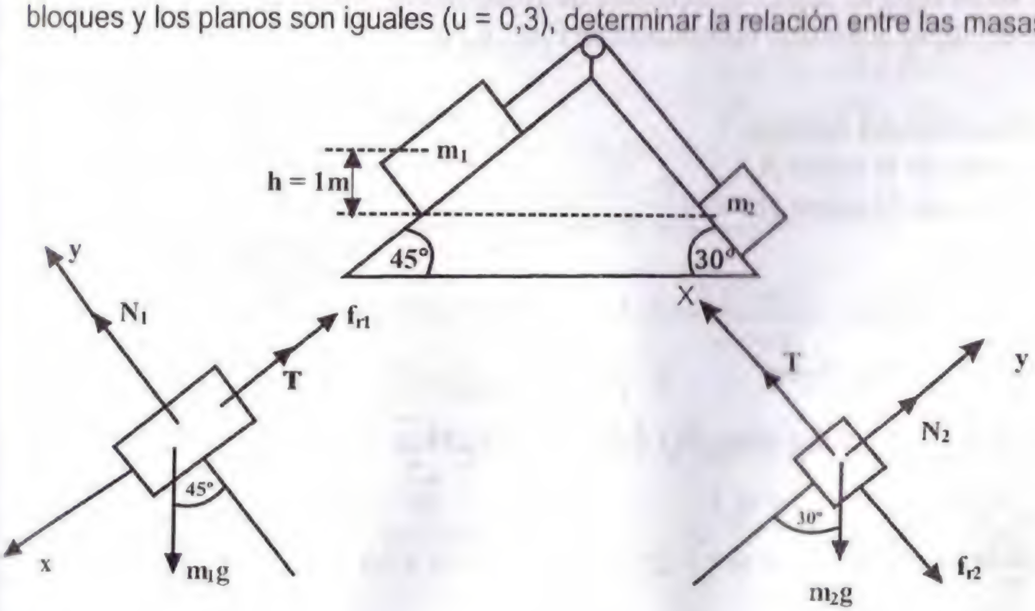
Sumamos (I) y (II)

$F - 2fr_2 - fr_1 = (m_A + m_B)\, a$

$$a = \frac{F - 2\,u m_B\; g - u(m_A + m_B)\, g}{m_A + m_B}$$

$$a = \frac{42 - 2\,(0{,}3)\,.2\,.\,(10) - 0{,}3(4 + 2)\,10}{4 + 2} \qquad a = 2\ m/s^2$$

12.- Dos bloques de masas m_1 y m_2 están unidos entre sí por medio de una cuerda que pasa a través de la polea (como se indica en la figura). La masa m_2 está 1 m, más abajo de m_1 (h= 1 m) después de un tiempo At = 2s desde el inicio del movimiento, ambos bloques se encuentran a la misma altura. Los coeficientes de rozamiento entre los bloques y los planos son iguales (u = 0,3), determinar la relación entre las masas (m_1/m_2)



$\Sigma Fy = 0$

$N_1 = m_1 g \cos 45^o$

$\Sigma Fx = m_1 a$

$m_1 g \text{ sen } 45^o - Fr_1 - T = m_1 a$

$m_1 g \text{ sen } 45^o - u \, . \, M_1 g \cos 45^o - T = m_1 a$ (I)

$\Sigma Fy = 0$

$N_2 = m_2 g \cos 30^o$

$\Sigma Fx = m_2 a$

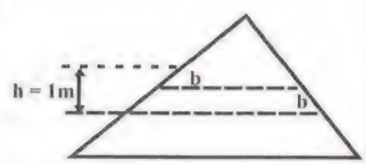
$T - m_2 g \text{ sen } 30^o - Fr_2 = m_2 a$

$T - m_2 g \text{ sen } 30^o - u. \, m_2 g \cos 30^o = m_2 a$ (2)

(1) + (2)

$m_1 g \text{ sen } 45^o - m_1 g \cos 45^o - m_2 g \text{ sen } 30^o - u \, m_2 g \cos 30^o - m_1 a + m_s a$

$$\frac{M_1}{m_2} = \frac{(g \text{ sen } 30^o + u \, g \cos 30^o + a)}{(g \text{ sen } 45^o - u \, g \cos 45^o - a)} \qquad (3)$$



m_1 y m_2 recorren la misma distancia b

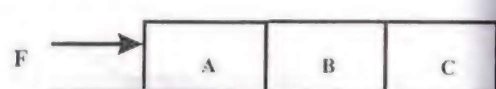
$b \, . \text{ sen } 45^o + b \text{ sen } 30^o = 1 \text{ m}$

$b = 0{,}828 \text{ (m)}$

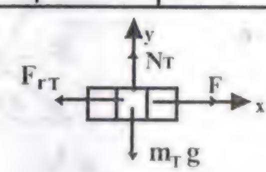
$b = \frac{1}{2} a \, t^2 \qquad a = \frac{2b}{t^2} = \frac{2 \, . \, 0{,}828}{2^2} = 0{,}414 (m/s^2)$

Reemplazando los valores de u; g; a en (3) se tiene $m_1/m_2 = 1{,}766$

33.- Tres bloques de masa m cada uno, se encuentran en un plano horizontal, como se indica en la figura. Los coeficientes de rozamiento entre cada bloque y el plano son: u_A; u_B; u_C. Calcular en función de F, u_A, u_B, u_C:



a) La aceleración del sistema.
b) La reacción de B sobre A.
c) La reacción de C sobre B.



a) $\Sigma Fx = mna$

$F - Fr_T = m_T a$

$N_A = N_B = N_C = mg$

$fr_T = fr_A + fr_B + fr_C = u_A N_A + u_B N_B + u_C N_C$

$fr_T = mg (u_A + u_B + u_C)$

$m_T = 3 \text{ mg}$

$$a = \frac{F - mg(u_A + u_B + u_C)}{3\,m}$$

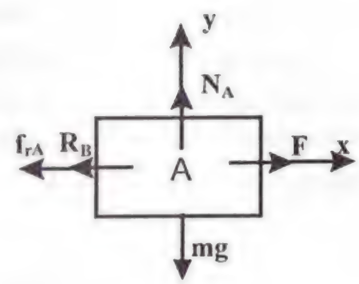
b) $\Sigma Fy = 0$

$N_A = mg$

$\Sigma Fx = ma$

$F - fr_A - R = ma$

$R_B = F - fr_A - ma$



Reemplazando el valor de a

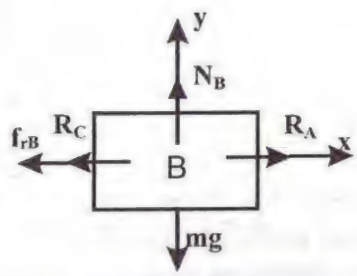
$R_B = (2F + mg(u_B + u_C - 2u_A) / 3$

c) $\Sigma Fy = 0$

$N_B = mg$

$\Sigma Fx = ma$

$R_B - R_C - fr_B = ma \quad R_C = R_B - fr_B - ma$



Feemplazando (a) y R_B,

$R_C = (F + mg\,(2u_C - u_A - u_B)) / 3$

14.- Un bloque de masa 0,20 Kg. tiene una velocidad de $0{,}5\vec{i}$ m/s cuando se encuentra en la posición $\vec{r} = -\vec{i} - 2\vec{j}$ m. Se aplica una fuerza $\vec{F} = -0{,}2\,\vec{i} - 0\,\vec{j}$ N sobre él. Determinar el tiempo en el que se detiene y la posición que ocupa.

m= 0,2 Kg.

$\vec{V}_o = 0{,}5\ \vec{i}$ m/s

$\vec{r}_o = (-\vec{i} - 2\vec{j})$ m.

$\vec{F} = (-0{,}2\,\vec{i} - 0\vec{j})$ N

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{(-0{,}2\vec{i} - 0\vec{j})\ N}{0{,}2\ Kg.} = \underline{-\vec{i}\ m/s^2}$$

Movimiento eje x

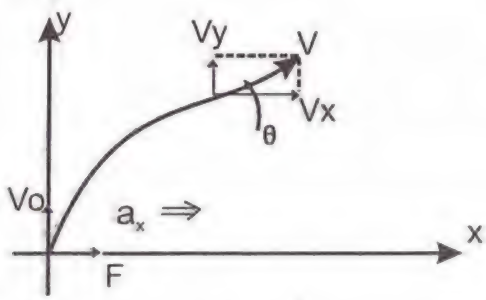
$$\begin{cases} Vfx = Vox + at \quad t = \dfrac{-0{,}5\ m/s}{-1\ m/s^2} = \underline{0{,}5\ s} \\ \vec{x} = \vec{V}ox\ t + \frac{1}{2}\ \vec{a}x\ t^2 \\ \vec{x} = 0{,}5\,\vec{i} - 0{,}5 + \frac{1}{2}\,(-\vec{i})\ 0{,}25 = 0{,}125\ \vec{i}\ m. \end{cases}$$

$\vec{\Delta}_r = 0{,}125\ \vec{i}$ m

$\vec{r} = \vec{r}o + \vec{\Delta r} = (-\vec{i} - 2\vec{j})$ m+ $(0{,}125\ \vec{i})$ m = $\underline{(-0{,}875\vec{i} - 2\vec{j})\ m}$

35.- Una bola de 0,1 kg esta viajando hacia el Norte (en una superficie horizontal bien grande y sin rozamiento) a razón de 3 m/s. Durante 40 segundos se aplica a la bola una fuerza constante de 0,1 N en dirección Este . Determinar

a) La velocidad de la bola al cabo de los 40 segundos
b) La ecuación de su trayectoria (y=f (x) o x= f(y)).
c) El vector desplazamiento desde el instante t=0 hasta t=40 segundos (Expresarlo en función de los unitarios $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.



$\vec{V} = 3\vec{j}$ m/s
m = 1 Kg.
$\vec{F} = 0,1\ \vec{i}$ N.
$\vec{a} = \vec{F}/m = 0,1\ \vec{i}$ m/s^2
$\vec{V}y = \vec{V}o = 3\vec{j}$ m/s

a) $\vec{V}x = \overset{=0}{\cancel{\vec{V}ox}} + \vec{a}t = 0,1\ i\ m/s^2\ (40s) = 4\ \vec{i}\ m/s$

$\vec{V} = (\ 4\vec{i} + 3\vec{j}\ )$ m/s ;   V = 5 m/s

tg θ = Vy/Vx = 3/4 ;   θ = 36,87°

<u>V = 5m/s ; 36,87° con la horizontal</u>

b) $x = \text{tg}\ \theta\ y - \dfrac{ax}{2\,(Vo \cos\theta)^2}\ .\ y^2$ θ = ∢ lanzamiento

$x = -\,0,1/2\ \ (3)\ \ (1)\ y^2$ <u>$x = -\ 0,0056\ y^2$</u>

c) $\vec{x} = \overset{o}{\cancel{\vec{V}ox}}\ t + \frac{1}{2}\vec{a}\ t\ = \frac{1}{2}\ (0,1)\ m/s^2\ \vec{i}\ \ (40)\ s = 80\ \vec{i}\ \ m$ $\dfrac{01}{2(3)^2x^2} = 0,0056$

$\vec{y} = \vec{V}oy\ t = 3\ \vec{j}\ m/s\ 40\ s\ = 120\ \vec{j}\ \ m$

<u>$\vec{r} = (80\ \vec{i} + \ 120\ \vec{j}\ )$ m</u>

36.- Una partícula de 10 g se mueve sobre una superficie horizontal con rozamiento, cuando pasa por la posición A tiene una velocidad de $5\vec{i}$ m/s, después de 10 s pasa por la posición B con una rapidez de 20 m/s. Determinar:

a) La fuerza neta.
b) El valor de la fuerza externa F (que forma un ángulo de 30° con la horizontal) causante de este cambio de rapidez. El valor del coeficiente rozamiento es 0,2.

a) $V_f = V_o + a\,t$ $\qquad a = \dfrac{20 m/s - 5 m/s}{10 s.} = 1{,}5 m/s^2$

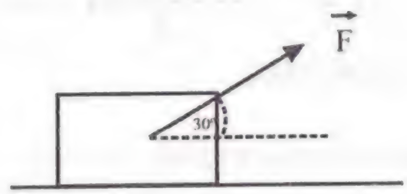
$\Sigma F_x = ma = F\ neta$; $F\ neta = 0{,}01\ Kg\ 1{,}5 m/s^2$

$F neta = 0{,}015\ N.$

b) $\Sigma F_y = 0$

$F \operatorname{sen} 30^o + N = mg$

$N = mg - F \operatorname{sen} 30^o$



$\Sigma F_x = m\,a$

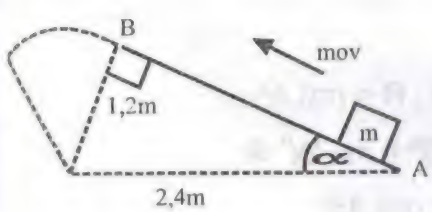
$F \cos 30^o - froz = ma$

$F \cos 30^o = ma + u(mg - F \operatorname{sen} 30^o)$

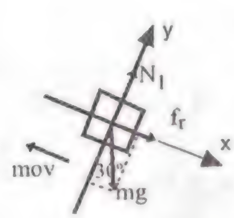
$$F = \frac{m\,(a + ug)}{u \operatorname{sen} 30^o + \cos 30^o} = 0{,}036\ N$$

$F = 0{,}36\ N$

37.- Un objeto de masa m se lanza desde el punto A por el plano inclinado hacia arriba con una rapidez Vo, como se indica en la figura. En el instante en que ingresa a la trayectoria circular (punto B) la fuerza normal de contacto entre el objeto y la superficie que lo soporta, se reduce a la mitad del valor que tenía un instante antes de pasar por B. El coeficiente de rozamiento entre el objeto y el plano inclinado es 0,3. Determinar Vo.



En el plano inclinado: $\qquad \alpha = \text{arc. sen} \left(\dfrac{1{,}2}{2{,}4}\right) = 30^o$



$\Sigma F_y = 0$

$N1 = mg \cos 30^o$ (1)

$\Sigma F_x = ma$

$mg \operatorname{sen} 30^o - fr = ma$

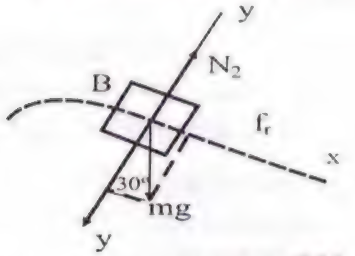
$\cancel{m}g \operatorname{sen} 30^o - u\,\cancel{m}g \cos 30^o = \cancel{m}a$

$a = 7{,}6\ (m/s^2)$

$V_B^2 = Vo^2 - 2a.\ (AB)$; $AB = 2{,}4^2 - 1{,}2^2 = 2{,}078\ m.$

$V_B^2 = Vo^2 - 31{,}586 \qquad (2)$

En el inicio del trazo circular (punto B)



$N_2 = \frac{N_1}{2}$(3) (condición del problema)

$\lessgtr Fr = m \cdot V_B^2/R$

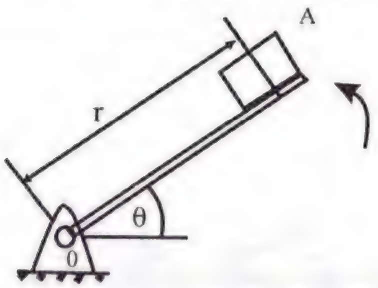
$mg \cos 30° - N_2 = m \dfrac{V_B^2}{R}$ (4)

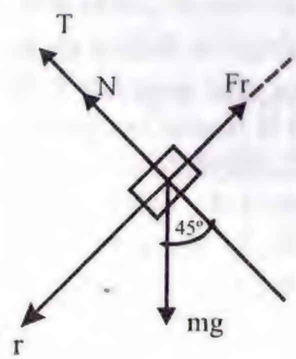
Reemplazando (1), (2) y (3) en (4)

$$mg \cos 30° - \frac{mg \cos 30°}{2} = m \frac{(Vo^2 - 32{,}586)}{R}$$

$V_0 = 6{,}06$ (m/s)

8.- La barra OA gira en un plano vertical alrededor del punto O tal como se indica en la figura, con rapidez angular constante w = 3 rad/s. Cuando pasa por la posición horizontal se coloca sobre la barra un cuerpo de masa m, a una distancia r = 45 cm. Se observa que el cuerpo comienza a deslizarse cuando $\theta = 45°$. Determinar el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la barra OA:





$\lessgtr F_T = ma_T$

$N = mg \cos 45°$

$\lessgtr Fr = ma_c$

$mg \text{ sen } 45° - fr = m.w^2 R$; $R = r = 0{,}45$ m

$mg \text{ sen } 45° - u\, mg \cos 45° = m \cdot W^2 R$

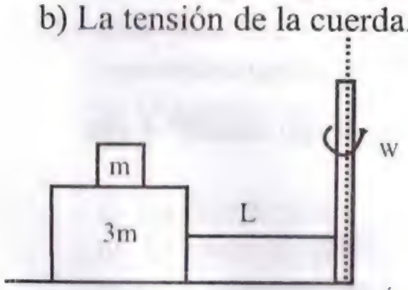
$u = (g \text{ sen } 45° - w^2 R) / g \cos 45°$

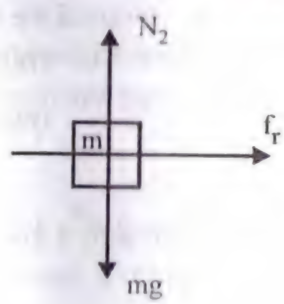
$u = 0{,}42$

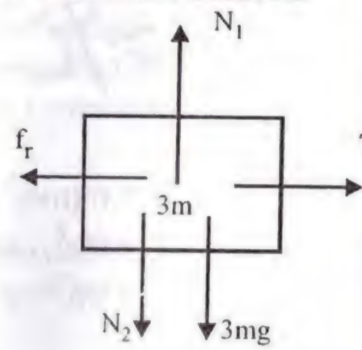
9.- Un cuerpo A de masa "3 m" se desplaza con movimiento circular uniforme sobre una mesa horizontal completamente lisa, sujeto a una cuerda de longitud L. Otro cuerpo B de masa "m" descanza sobre el cuerpo A. Calcular:

a) El coeficiente de rozamiento mínimo entre las superficies de los cuerpos A y B, para que a una velocidad "W", el cuerpo B no se deslice sobre A.

b) La tensión de la cuerda.







a) La única fuerza que puede hacer mover la masa m es la fuerza de rozamiento que sobre ella actúa y para que no resbale sobre la masa 3m debe desplazarse con la misma rapidez angular.

$\sum Fr = Fc$

$F_R = m \cdot W^2 \cdot L$

$u \cdot m \cdot g = m \cdot W^2 \cdot L$

$$u = \frac{W^2 \cdot L}{g}$$

b) Analizando la masa 3m

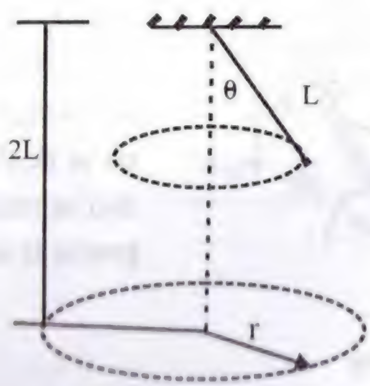
$\sum Fr = Fc$

$T - fr = (3m) \cdot W^2 \cdot L$

La fuerza de rozamiento es la misma para ambas.

$T = 4m \cdot W^2 \cdot L$

40.- Un balde se suspende de una cuerda de longitud 1,2 m , y se mueve en un círculo horizontal. Las gotas de agua que abandonan el balde caen y forman en el piso un círculo de radio r. Calcule el radio r, cuando $\theta = 30^\circ$



$\sum Fy = 0$

$T \cos\theta - mg = 0$

$$T = \frac{Mg}{\cos\theta}$$

$\sum Fr = Fc$

$$T \operatorname{sen}\theta = \frac{mV^2}{R}$$

Reemplazamos el valor de la tensión

$$mg \operatorname{tg}\theta = \frac{mV^2}{R}$$

$R = L \operatorname{sen}\theta$ y despejando V tenemos:

$$V = \sqrt{L \operatorname{sen}\theta \cdot g \cdot \operatorname{tg}\theta}$$

Si $\theta = 30^\circ$

$V = 1,86$ m/s.

Esta es la rapidez tangencial con la que se desprenden las gotas, describiendo luego una trayectoria parabólica.

$$Y = \cancel{V_y t}^{\,0} - (\frac{1}{2})\, g\, t^2$$

$$Y = 2\,L - L\,\text{Sen}\,\theta$$

$$Y = 1{,}36\ m$$

$$-\ 1{,}36\ m = -\,(\frac{1}{2})\ 10\ \ m/s^2\ .\ t^2$$

$$t\ = 0{,}52\ \text{segundos}$$

$$X = v\ .\ t$$

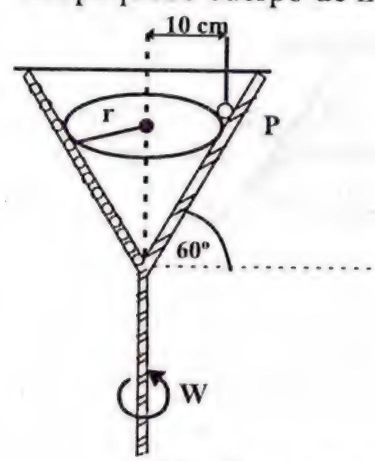
$$X = 1{,}86\ m/s\ \ .\ \ 0{,}52\ s.$$

$$X = 0{,}97\ m.$$

$$r^2\ = R^2\ + X^2$$

$$r = 1{,}14\ m$$

41.- Un pequeño cuerpo de masa "m" se coloca en un punto P, como se indica en la figura. El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el embudo es 0,3. Determinar: Los límites entre los cuales debe girar el sistema para que el bloque no se deslice. Considere que los cambios de velocidad se realizan tan lentamente de modo que se desprecie la aceleración angular.



<u>Cálculo de W máx</u>

$$\Sigma Fy = 0$$

$$N\cos\theta\ - mg - fr\ \text{sen}\theta = 0$$

$$N\cos\theta\ - N\,\mu\ \text{sen}\theta = mg$$

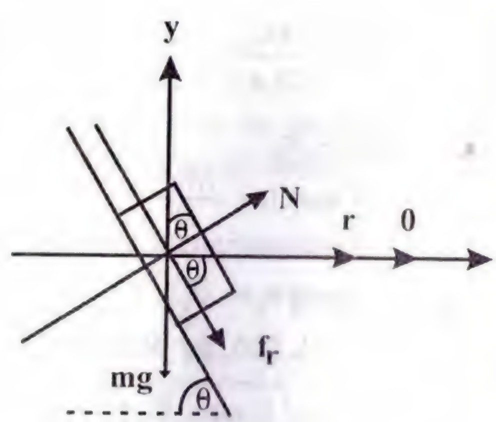
$$N = \frac{mg}{\cos\theta\ - \mu\ \text{sen}\,\theta}$$

$$\Sigma Fr = Fc$$

$$N\,\text{sen}\theta\ + fr\cos\theta\ = Fc$$

$$N\,\text{sen}\theta\ +\ \mu N\cos\theta\ = Fc$$

$$N\,(\text{sen}\theta\ +\ \mu\cos\theta\,) = Fc$$



$$\frac{mg\ (sen\,\theta + \mu\cos\theta)}{\cos\theta\ -\ \mu\ sen\theta} = m\,W^2\ r$$

$$W = \sqrt{\frac{g\ (sen\,\theta + \mu\cos\theta)}{r\,(\cos\ \theta - \mu sen\,\theta)}}$$

$$W = \sqrt{\frac{10\ (0{,}866 + 0{,}15)}{0{,}1\ (0{,}5 - 0{,}2598)}}$$

W = 20,5 rad/s.

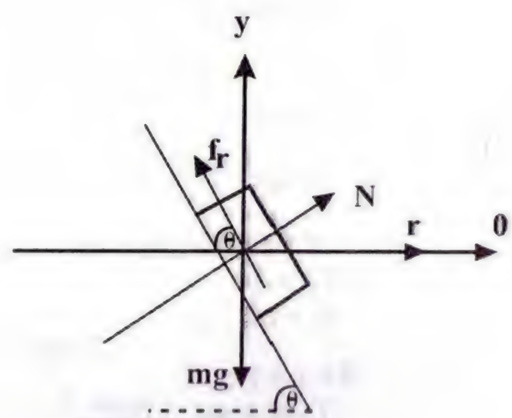
<u>Cálculo de W min</u>

$\sum Fy = 0$

$N\ \cos\theta - mg - N\mu\ sen\,\theta = 0$

$N\ \cos\theta - N\ \mu\ sen\theta\ = mg$

$$N = \frac{mg}{\cos\theta\ - \mu\ sen\,\theta}$$



$\sum Fr = Fc$

$-\ Fr\ \cos\theta\ \ + N\ \ sen\theta\ = Fc$

$N\ (\ sen\ \theta\ - \mu\ \ \cos\theta\ ) = Fc$

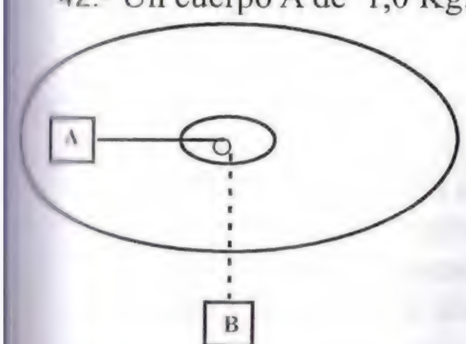
$$\frac{mg\ (\ sen\theta\ - \mu\ \ \cos\theta\ )}{\cos\theta\ + \mu\ \ sen\theta} = m\,W^2\ \ r$$

$$W = \sqrt{\frac{g\ (\ sen\,\theta\ \ - \mu\ \ \cos\theta\ )}{r\ (\ \cos\ \theta\ + \mu\ \ sen\theta\ )}}$$

$$W = \sqrt{\frac{10\ (0{,}866 - 0{,}15)}{0{,}1\ (0{,}5 + 0{,}2598)}}$$

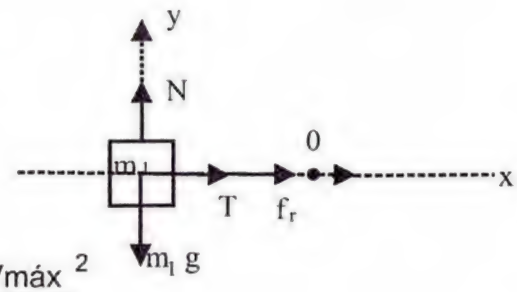
W = 9,7 rad/s.

42.- Un cuerpo A de 1,0 Kg., está colocado sobre una mesa giratoria horizontal a una distancia de 100 cm del eje de rotación. Se conoce que el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la mesa es 0,2. Una cuerda ligera fija al cuerpo A pasa por una polea sin fricción montada en la mesa giratoria y cuelga a través de un orificio en el centro de la mesa como se indica en la figura. En el otro extremo de la cuerda se ata un cuerpo B de 5,0 Kg. Entre que límites debe variar el número de revoluciones por segundo de la mesa, para que el cuerpo B no se mueva hacia arriba o hacia abajo.



$W = v/R$

Velocidad máxima



$\Sigma Fy = 0$

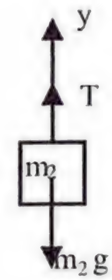
$N = m_1 \ . \ g$

$\Sigma Fr = Fc$

$T + fr = Fc$

$T + u \ . \ m_1 g = m_1 \ . \ \dfrac{Vmáx^2}{R}$

$m_2 g + u \ . \ m_1 g = m_1 \ . \ \dfrac{Vmáx^2}{R}$



$\Sigma F_y = 0$

$T = m_2 g$

$$Vmáx = \sqrt{\frac{R \ . \ g(m_2 + u \ . \ m_1)}{m_1}}$$

$$Vmáx = \sqrt{\frac{1 \ . \ 1 \ (5{,}2)}{1}}$$

Vmáx= 7,13 m/s. $\quad W_1 = 1{,}13$ rev/s.

Velocidad mínima

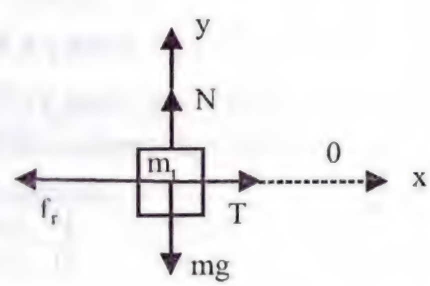
$\Sigma Fy = 0$

$N = m_1 \ . \ g$

$\Sigma F \ r = Fc$

$T - fr = m_1 \ . \ \dfrac{Vmín^2}{R}$

$m_2 g - u \ m_1 g = m_1 \ . \ \dfrac{Vmín^2}{R}$



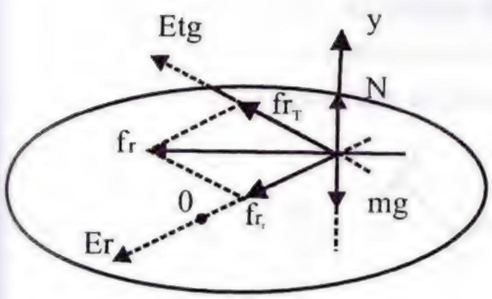
$$Vmín = \sqrt{\frac{R \ . \ g(m_2 + u \ . \ m_1)}{m_1}}$$

$$Vmín = \sqrt{\frac{1 \ . \ 10 \ (4{,}8)}{1}}$$

Vmín = 6,85 m/s. $\quad W_2 = 1{,}09$ rev/s.

$W_2 \leq W \leq W_1$

43.- Sobre un disco se encuentra una moneda a una distancia de 0,2 m del centro, el sistema gira en el plano horizontal partiendo del reposo y con una aceleración angular 2 rad/s^2. Determinar el tiempo máximo que la moneda permanecerá sin deslizarse respecto al disco. El coeficiente único de rozamiento entre la moneda y el disco es 0,3.



fr = fuerza de rozamiento

fr_r = Fuerza de rozamientot en el eje radial

fr_t = fuerza de rozamiento en el eje tangencial

$$\sum Fy = 0$$
$$N = mg$$

$$fr = \mu \,.\, N = \mu \,.\, mg \quad (1)$$
$$fr^2 = fr_r^2 + fr_T^2 \quad (2)$$

$$W_F = \cancelto{0}{W_0} + \alpha \,.\, t$$
$$\sum Fr = ma_c$$
$$Fr_r = m \; W_F^2 \,.\; R \quad (3)$$

$$\sum F_T = m\, a_T$$
$$fr_T = m \,.\, \alpha \,.\, R \quad (4)$$

Reemplazando (1), (3) y (4) en (2):

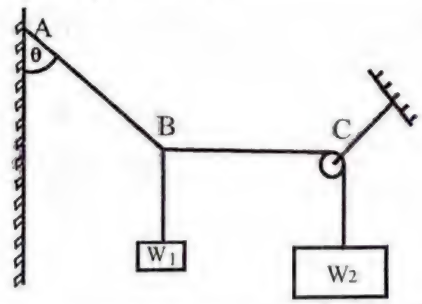
$$(u\, mg) = (m\, W_F^2\; R)^2 + (m \alpha R)^2$$

$$t = \sqrt[4]{\frac{u^2 g^2 - \alpha^2 R^2}{\alpha^4 R^2}} \quad \Bigg| \begin{array}{l} \text{con} \\ wf = \alpha\, t \end{array}$$

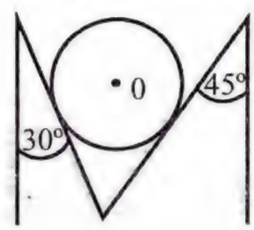
$$t = 1{,}84\ (s)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

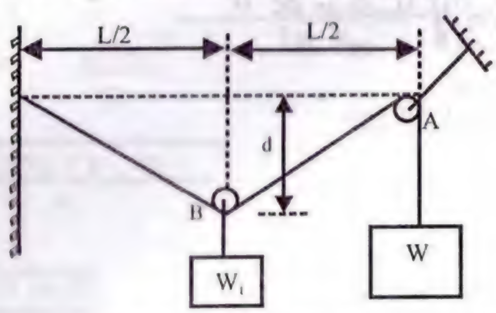
1.- Determinar el ángulo θ y la tensión en la cuerda AB si $W_1 = 0{,}3$ Kg y $W_2 = 0{,}4$ Kg. Para que el sistema este en equilibrio.



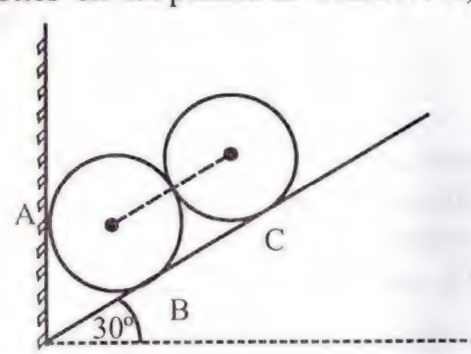
2.- Una esfera de 200 N de peso se apoya en dos planos lisos como se indica en la figura. Determinar las reacciones que actúan sobre la esfera.



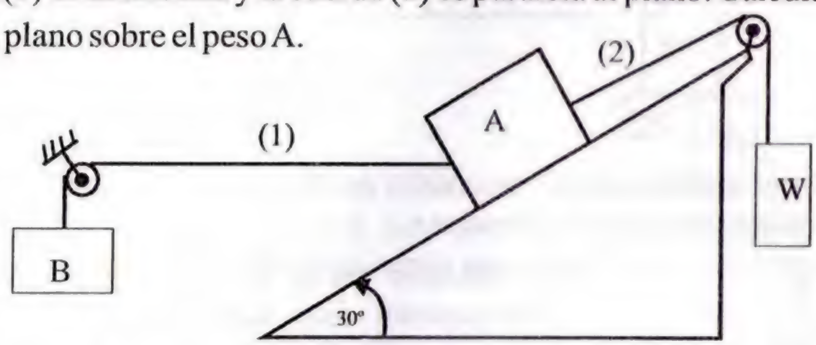
3.- Un peso W está suspendido mediante una cuerda inextensible que pasa por la polea A. Otra polea B sostiene un peso W_1 aumentando la tensión de la cuerda. Determinar en función de W, W_1 y de L; la distancia d para que el sistema permanezca en equilibrio. Despreciar los rozamientos en las poleas.



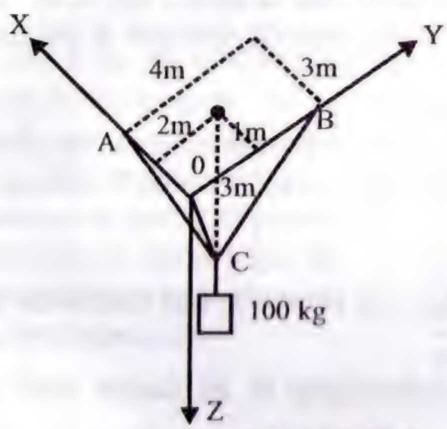
4.- Dos rodillos lisos e iguales de peso 500 N están colocados como se indica en la figura. Hallar las reacciones en los puntos de contacto A, B, C.



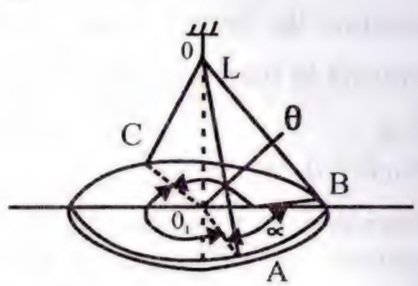
5.- Determinar el peso W necesario para mantener el equilibrio en el sistema de la figura en el cual $W_A = 100$ N y $W_B = 10$ N. El plano y las poleas son totalmente lisos la cuerda (1) es horizontal y la cuerda (2) es paralela al plano. Calcular también la reacción del plano sobre el peso A.



6.- Un cuerpo de 100 Kg. está soportado por tres cuerdas sujetos al techo de una habitación como se indica en la figura. Hallar la tensión de cada una de las cuerdas en función de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ de acuerdo al sistema de coordenadas indicado.



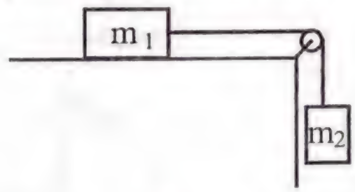
7.- Determinar la tensión en cada cable del sistema de la figura, para que permanezca en equilibrio.



0,A= 0,B = 0,C = 10 m
m = 50kg
R = 6m
∝ = 90°; B = 170°
θ = 100°

8.- Se desea sacar agua de un pozo para lo cual se utiliza una polea, una cuerda y un recipiente de masas "despreciables". Si se sube el recipiente con agua hasta que el recipiente esté a raz de la boca del pozo y la cuerda cuya longitud es "L" medida desde la parte superior del recipiente hasta la polea. Para alcanzar al recipiente y retirar del gancho que une a la polea se aplica una fuerza horizontal igual a 1/3 del peso del agua y a 2/3 de "L", medido desde la polea. Determinar en términos de $\vec{i}, \vec{j}$, el vector posición del recipiente.

9.- Determinar la aceleración del sistema y la tensión en la cuerda en función de m_1, m_2, g. Considere que no existe rozamiento entre el bloque de masa m_1 y el plano



10.- Dos cuerpos están unidos por medio de una cuerda. Una segunda cuerda está atada al cuerpo de arriba. Determinar:

$2kg = m_1$

$4kg = m_2$

A)¿ Cuál debe ser la fuerza $\vec{F}$ que se debe aplicar a la cuerda superior para mantener suspendidos a los dos cuerpos en reposo ?

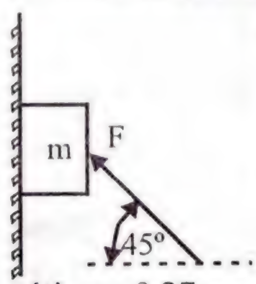
b) Cuál debe ser la fuerza que se debe aplicar a la cuerda superior para comunicar a los cuerpos una aceleración de $2\ \overrightarrow{m/s^2}$. En este caso determine la tensión de la cuerda que une a los cuerpos.

11.- Conteste las siguientes preguntas:

a) Indique la diferencia entre reposo y equilibrio de translación.

b) ¿Es posible que un cuerpo esté en reposo cuando actúan sobre él fuerzas externas?

12.-El cuerpo de la figura de 3 Kg está sometido a la acción de la fuerza F= 50N en la dirección indicada.



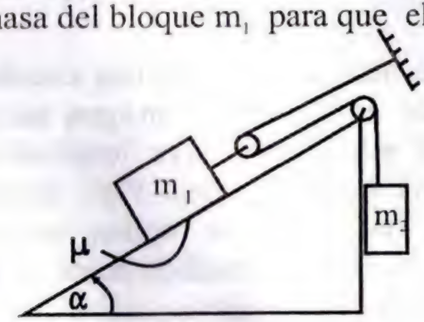
μ estático = 0,27

a) Averiguar si el bloque está o no en equilibrio, calcule su aceleración y el valor de la fuerza de roce.

b) Determinar los límites entre los que puede variar el valor de la fuerza (F) para que el bloque no se mueva.

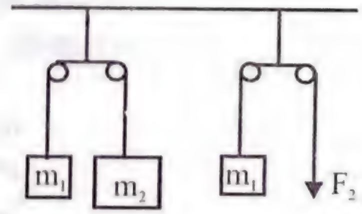
μ cinético = 0,25

13.- Entre qué limites debe variar la relación de la masa del bloque m_2 respecto a la masa del bloque m_1 para que el sistema de la figura no se mueva.



14.- Determinar la aceleración de la masa m_1 en cada uno de los casos de las siguientes figuras

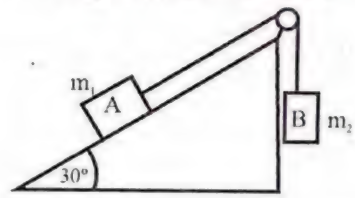
$m_1 = 10$ Kg.
$m_2 = 30$ Kg.
$F_2 = 300$ N.
$g = 10$ m/s.



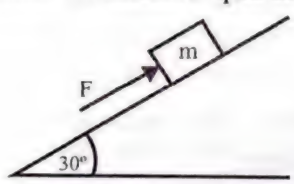
15.- Si aplicamos una fuerza de 20 N en el bloque A, paralela al plano y dirigida hacia abajo ¿para dónde se mueve el sistema y cuál es la aceleración?. Para que valores de inclinación del plano el sistema se movería con rapidez constante.

$m_1 = 10$ Kg.
$m_2 = 7$ Kg.

u (único) = 0,2

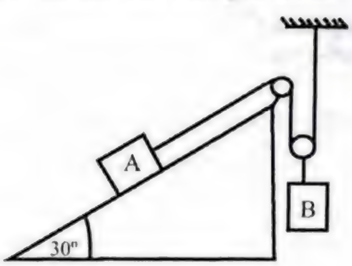


16.- Un bloque de masa 1 kg se encuentra sobre un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Si se aplica una fuerza F, como se indica en la figura y el valor del coeficiente único de rozamiento entre el bloque y el plano es 0,347. Determine en cada caso el sentido o tendencia del movimiento y el valor de la fuerza de rozamiento.

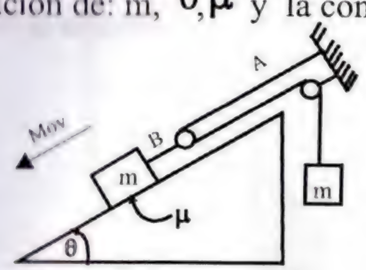


F	MOVIMIENTO	fr
2 N	------------------	-----
6 N	------------------	-----
9 N	------------------	-----

17.- La masa del bloque A es 6 veces la de B. Determinar la distancia en metros que el bloque A recorre a lo largo del plano (y hacia dónde ?) cuando han transcurrido 2 segundos luego de soltar el sistema del reposo, se considera que no existe ninguna clase de rozamiento.



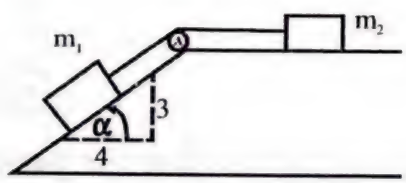
18.- En el sistema de la figura. Determinar en función de: m, θ, μ y la constante g.
a) La aceleración de cada bloque.
b) La tensión en la cuerda A.



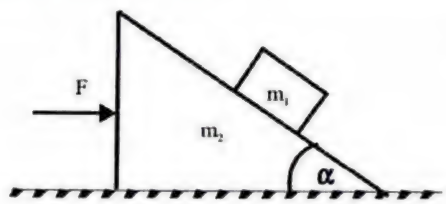
19.- En el sistema mostrado en la figura y conociendo que $m_1 = 10$ Kg. $m_2 = 5$ Kg. y $\mu = 0{,}5$ Determinar la magnitud de:

a) La fuerza de roce real en cada uno de los cuerpos.

b) La tensión en la cuerda



20.- Determinar la aceleración de la cuña para que el bloque colocado sobre ella no resbale si no existe rozamiento.

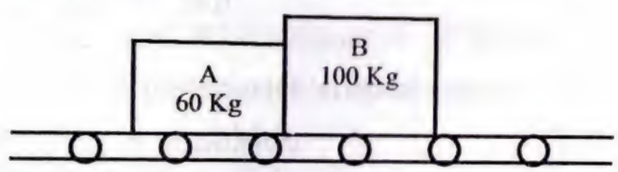


21.- Se colocan dos cuerpos sobre una banda transportadora que está en reposo. El coeficiente de rozamiento entre la caja A y la banda es 0,20 y entre la banda y la caja B es 0,10. Si la banda súbitamente comienza a moverse y existe desplazamiento de las cajas sobre la banda.

Determinar:

a) La aceleración de las cajas.

b) La fuerza ejercida de la caja A sobre la caja B.



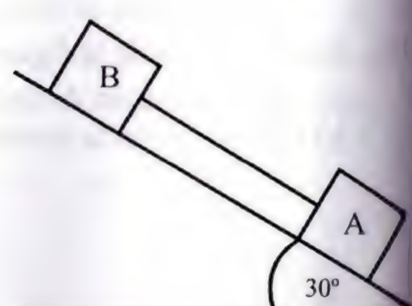
22.- Dos cuerpos A y B de 200 y 400 Kg. respectivamente están unidos por una cuerda y descanzan sobre el plano inclinado de la figura, sus coeficientes de rozamiento son $\mu_A = 0{,}5$; $\mu_B = 0{,}33$. Determinar:

a) El módulo de la fuerza de rozamiento sobre el bloque B.

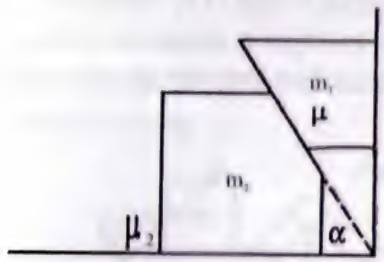
b) Si el sistema se mueve o no.

c) La tensión en la cuerda.

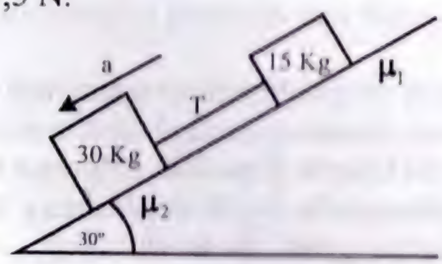
d) ¿Qué sucede con el sistema al cortar la cuerda?



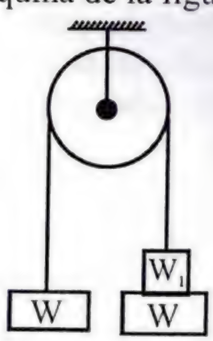
3.- En el sistema de la figura se tiene como datos:$\propto$ μ_1 μ_2 , m_1, m_2. Calcule las aceleraciones de cada uno de los cuerpos en función de estos parámetros.



4.- Dos pesos de 150 N y 300 N conectados por una cuerda se deslizan por un plano inclinado con una aceleración de 3 m/s^2.
Determinar los coeficientes de rozamiento μ_1 y μ_2 sabiendo que la tensión en la cuerda es igual a 4,5 N.



5.- En la máquina de la figura se tienen dos pesos W iguales, los que están unidos por medio de una cuerda inextensible de peso despreciable. Se añade un peso W_1 a uno de los pesos anteriores, causando el movimiento del sistema. Determinar la aceleración del movimiento en función de los pesos W y W_1.



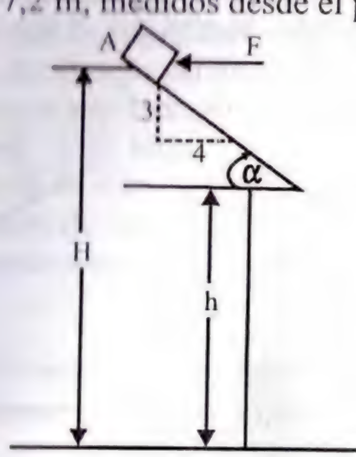
6.- Un bloque de 10 Kg. se suelta desde un punto A ubicado en el techo de una torre. Si el bloque llega a un punto de la calle situado a 7,2 m, medidos desde el pie de la torre y utiliza 2 s desde el instante en que abandona el techo. Determinar:

a) El vector velocidad en términos de $\vec{i}; \vec{j}$ con que abandona el techo.

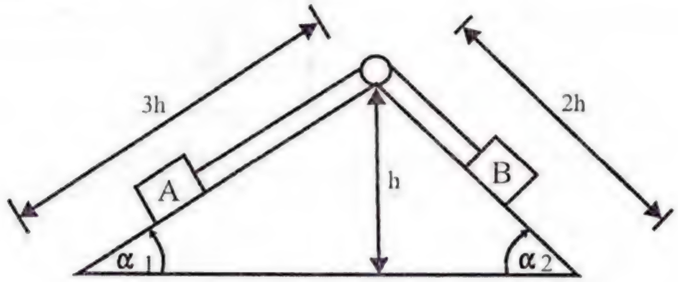
b) La altura h de la torre. Si H del punto A es 34,4 metros.

c) ¿Cuál es la longitud que recorre el bloque a lo largo del techo?

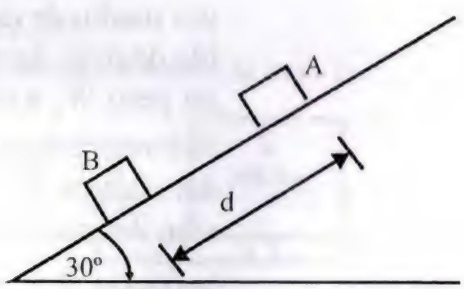
d) ¿Con qué aceleración recorre esa distancia.?



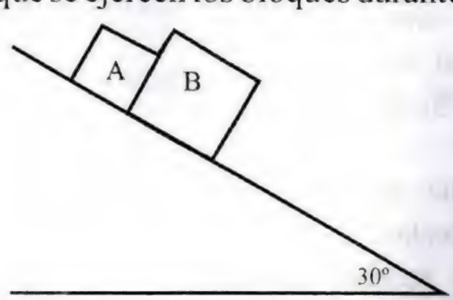
27.- Dos bloques idénticos de masa "m", están unidos por una cuerda de longitud 3h y descansan en un doble plano inclinado con las dimensiones indicadas en la figura ¿A qué rapidez se moverá el cuerpo A cuando el bloque B llega a la base del plano?. Suponer que el bloque B parte de lo alto del plano y que las superficies son lisas.



28.- Los bloques A y B de la figura originalmente se mantienen en reposo sobre el plano inclinado. El coeficiente de rozamiento al deslizamiento en la base del bloque B es 0,4 y en la base del bloque A es 0,2. El bloque B se suelta desde el reposo y 1 segundo más tarde se suelta A. Si A alcanza a B cuando este se ha movido durante 6 segundos ¿cuál es la distancia que los separaba inicialmente? El bloque B pesa el doble de A.



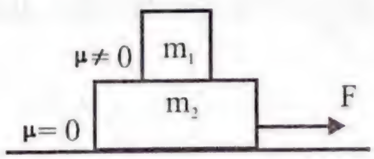
29.- Dos bloques A y B se deslizan hacia abajo de un plano inclinado, que forma un ángulo de 30º con la horizontal, bajo la acción de la gravedad. Si las masas de los bloques son: m_A = 5 Kg y m_B = 10 kg, además los coeficientes de rozamiento entre las superficies en contacto son 0,15 y 0,30 respectivamente. Determinar la fuerza F que se ejercen los bloques durante el movimiento.



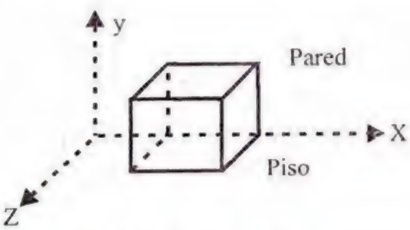
10.- En el sistema de la figura. Determinar:

a) La aceleración del sistema, si el bloque m_1 se mueve junto con el bloque m_2 (sin deslizar sobre éste), cuando actúa $\vec{F}$.

b) La F mínima que debe aplicarse sobre m , para que el bloque m_1 empiece a deslizarse respecto a m_2 .



11.-¿Cuál es la aceleración con que se mueve el bloque que se encuentra en la esquina de la figura en contacto con el piso y la pared vertical? su peso es de 200 N y está actuando sobre la partícula una fuerza $\vec{F} = 40\vec{i} - 20\vec{j} - 20\vec{k}$. N.



12.-Un cuerpo deberá emplear teóricamente 8 segundos en resbalar por un plano inclinado 30ºcon relación al piso, pero debido a la presencia del rozamiento emplea 12 segundos. Determinar el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano.

13.- Un bloque de 20 Kg es halado con una fuerza de 16 N que forma un ángulo de 30º con la horizontal moviéndose con velocidad constante sobre un tablero horizontal. Determinar el coeficiente de rozamiento entre las superficies en contacto.

14.- Determinar la distancia recorrida por un bloque desde el punto en que su rapidez es 9 m/s hasta cuando es 6 m/s, si sube por un plano inclinado 15º sobre la horizontal y su coeficiente de rozamiento cinético es 0,3.

15.- Un auto se mueve con una rapidez de 96 Km/h a lo largo de una carretera horizontal Cuando está a una distancia de 30,5 m de una rampa que forma un ángulo de 30º con la horizontal Si el coeficiente de rozamiento entre las dos superficies es 0,5 determine la altura a la que llegará el móvil sobre la rampa hasta detenerse.

16.- Dos cuerpos con masas de 8 Kg y 2 Kg respectivamente se encuentran en reposo uno al lado del otro sobre una mesa pulida (rozamiento despreciable), la masa.

De 8 Kg, es acelerada, partiendo del reposo, por medio de una fuerza de 7 N y la de 2 Kg es acelerada de igual manera y en la misma dirección de la primera pero con una fuerza de 1,4 N. Ambos cuerpos empiezan a acelerarse en el mismo instante. ¿Qué tiempo transcurrirá hasta que los dos cuerpos se encuentren separados 5 m?

37.- Si en problema Nº 24 resuelto, el coeficiente de fricción de cada bloque y la superficie es 0,2. Determinar la acción del bloque B sobre el bloque A.

38.- Un cuerpo desliza primero a lo largo de un plano inclinado 30º y luego continúa moviéndose sobre el plano horizontal. Determinar el coeficiente de rozamiento, si se sabe que el cuerpo recorre en el plano horizontal el doble de la distancia que en el plano inclinado.

39.- Dos objetos de 500 Kg. cada uno se ata con una cuerda y se cuelgan de una polea sin rozamiento situada en la parte alta de un doble plano inclinado. Uno de los lados del plano forma un ángulo de 45º con la horizontal y el otro forma 30º con la misma línea. De esta manera se forma a un ángulo de 105º en la parte alta donde se halla la polea. ¿Cuál es la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda?

40.- Un cuerpo de 200 gramos. parte del reposo y desliza hacia abajo sobre un plano inclinado liso. Si recorre 120 cm. durante el tercer segundo. Determinar el ángulo de inclinación del plano.

41.- Una bala cuyo peso es 5 N. se lanza sobre un medio homogéneo que le ofrece una resistencia 2 N/s. ¿Cuántos segundos tardará en pararse si su velocidad inicial es de 49 m/s?

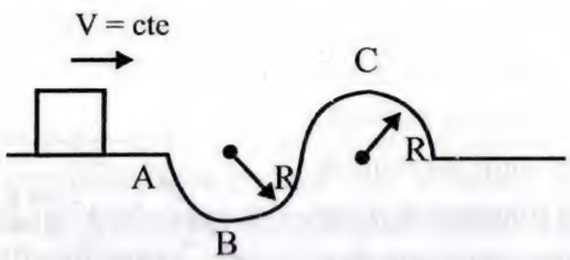
42.- Se lanza un cuerpo con una cierta rapidez inicial Vo al comienzo de un plano inclinado 20º con la horizontal. El bloque llega a subir hasta una posición B y luego regresa pasando nuevamente por la posición de partida. Si el tiempo empleado en la subida es 2,4 segundos y la bajada 4,5 segundos. Determinar la distancia que recorre el cuerpo sobre el plano y las velocidades de partida y de regreso en la segunda pasada del cuerpo por su posición de partida.

43.- Un cuerpo se mueve sobre una superficie horizontal bien grande y sin rozamiento; a un tiempo t = 0 cuando su velocidad es $9\vec{i} + 3\vec{j}$ m/s actúa sobre él una fuerza $\vec{F} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ N. Si la masa del cuerpo es 1 Kg, después que han transcurrido 5 segundos. Determinar:

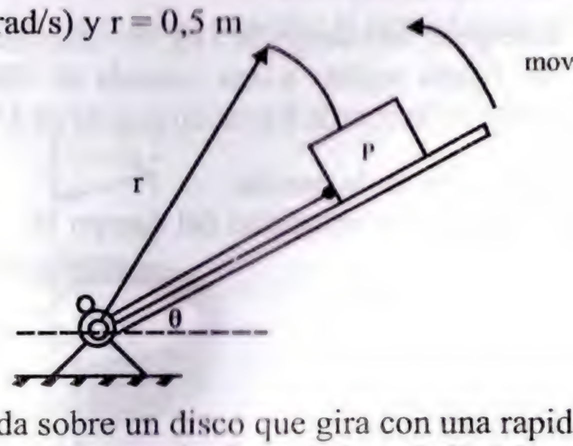
a) La magnitud y dirección de la velocidad.
b) La aceleración lineal o tangencial
c) la aceleración normal

44.- Un cuerpo de 10 Kg. se mueve sobre una superficie horizontal. La fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque es $\vec{Fr} = -5\vec{i}$ N. En el instante t = 0 su velocidad es $\vec{Vo} = 10\vec{i}$ m/s y se le aplica una fuerza adicional $\vec{F} = -15\vec{i}$ N. Determinar:
a) La velocidad del cuerpo en función de $\vec{i}, \vec{j}$, para t = 7 (s).
b) La rapidez media luego de 6 (s).
c) El coeficiente de rozamiento.
d) La fuerza de rozamiento en función de $\vec{i}, \vec{j}$, para t = 5 (s)

45.- Un móvil se desplaza con rapidez constante sobre la pista vertical lisa de la figura, determinar si la magnitud de la fuerza normal es igual o diferente en los puntos A, B y C. En caso de ser diferentes en qué punto o puntos, tendrá su mayor valor.



46.- Un cursor P que pesa 80 N. descanza sin rozamiento en el brazo que gira en un plano vertical con una rapidez angular que aumenta 2 rad/s cada segundo. El movimiento radial del cursor está controlado por una cuerda. Determinar la fuerza que el brazo ejercerá sobre el cursor y la tensión en la cuerda para la posición en la que $\theta = 30°$, W = 6 (rad/s) y r = 0,5 m



47.- Una moneda de masa m está colocada sobre un disco que gira con una rapidez constante de 1 rad/s. y el coeficiente de rozamiento es 0,2. ¿Cuál debe ser la distancia máxima a la que se debe colocar la moneda, respecto al centro del disco, para que no deslice?

48.- El plato giratorio de un tocadiscos gira a 33 (1/3) RPM. A una distancia de 0,30 m del eje se encuentra una pulguita de masa 2,0 x 10^{-5} kg. Determinar:

a) La fuerza neta que actúa sobre la pulguita.

b) El coeficiente de rozamiento entre el plato y la pulguita para que ésta no salga despedida.

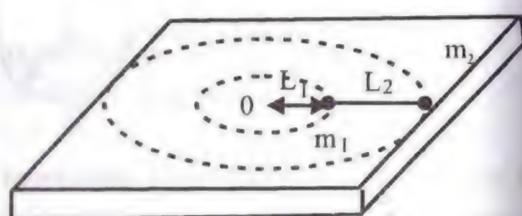
49.- Una curva tiene un peralte de 30º y un radio de 100 m, si el coeficiente de rozamiento entre los neumáticos y la carretera es de 0,2 . Determinar

a) La rapidez óptima con la que un auto debería tomar la curva.

b) El rango de rapideces con el que podría entrar a la curva un auto para que no derrape (resbale lateralmente.)

c) Si la masa del auto es de 1000 kg, determinar para el numeral (b) los valores de la fuerza centrípeta en los casos límites.

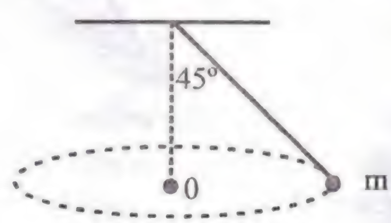
50.- Una masa m_1 está sujeta a una cuerda de longitud L_1 fija por un extremo. La masa se mueve en un círculo horizontal soportada por una mesa horizontal lisa. Una segunda masa m_2 se une a la primera mediante una cuerda de longitud L_2 y se mueve también en círculo como se indica en la figura. Determinar la tensión en cada una de las cuerdas cuando las masas giran con una frecuencia de f(rev/s).



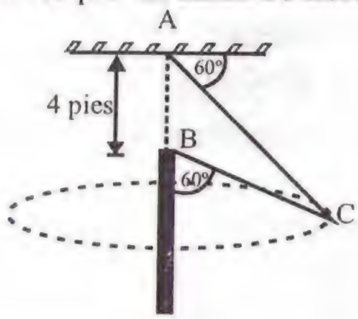
51.- Se hace girar un cuerpo de 5 kg en una circunferencia horizontal como se indica en la figura sujeta a una cuerda de longitud 2 m y con una rapidez Vo constante. Si la cuerda forma un ángulo de 45° con la vertical. Calcular:

a) La tensión en la cuerda.

b) El valor de la velocidad del cuerpo Vo.



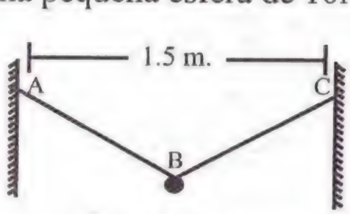
52.- Un bloque de masa 10 libras está asegurado a los extremos de los alambres AC



y BC, como se indica en la figura. El sistema gira en una circunferencia horizontal con una rapidez constante. Determine:

a) La magnitud de la velocidad para que la tensión en las dos cuerdas sea la misma.
b) El valor de la tensión.

53.- Una pequeña esfera de 10N se sostiene mediante dos cuerdas AB y BC

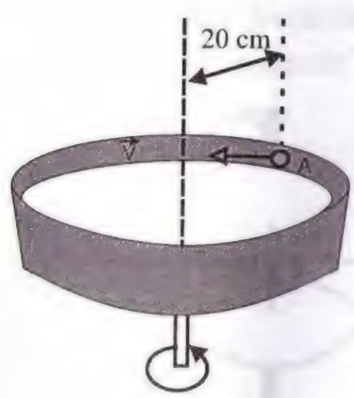


$\overline{AB} = \overline{BC} = 1$ m.

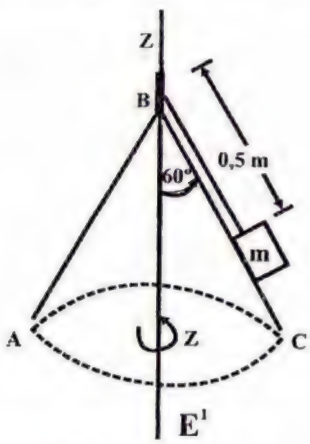
como se muestra en la figura. En la posición mostrada se le comunica a la esfera una rapidez inicial horizontal de 20 m/s para que describa una trayectoria circular vertical. Determinar la tensión en las cuerdas en el punto más bajo de la trayectoria.

54.- Un motociclista toma una curva con una rapidez de 72 km/h en una carretera horizontal no peraltada. Si se conoce que el radio de la curva es 50 m, calcular el valor mínimo del coeficiente de rozamiento entre las ruedas y el pavimento para que no haya deslizamiento.

55.- El sistema de la figura gira alrededor de un eje vertical con velocidad constante. Conociendo que el coeficiente de rozamiento entre el pequeño bloque A y la pared cilíndrica es 0,2; determinar la mínima rapidez V para el cual el bloque permanecerá en contacto con la pared.



56.- Un bloque de 5 Kg., se encuentra sobre una superficie cónica lisa ABC,



que gira alrededor del eje EE' con una rapidez angular de 10 RPM. Si el bloque no desliza respecto al cono. Calcular:

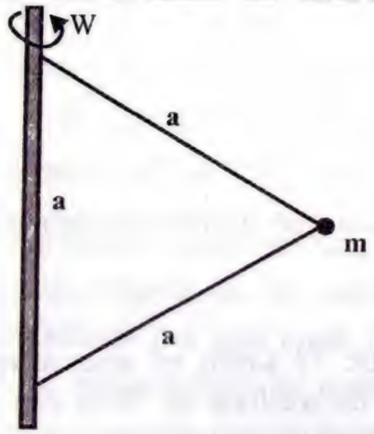
a) La rapidez lineal del cuerpo.

b) La reacción de la superficie sobre el cuerpo.

c) La tensión de la cuerda.

d) La rapidez angular necesaria para reducir la reacción del plano a cero.

57.- Una bola de masa "m" está unida mediante dos hilos a una varilla vertical giratoria, tal como se representa en la figura. Suponiendo que la velocidad angular de la varilla W, es igual a la de la bola la cual describe una trayectoria circular horizontal alrededor de la primera, y que el valor de W es el necesario para mantener tensos los hilos. Calcular la tensión que soporta cada uno de ellos, en función de los parámetros que intervienen.

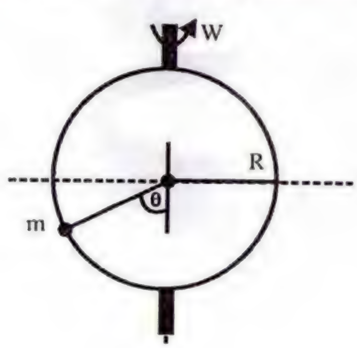


58.- Un pequeño cuerpo de masa "m" se encuentra sobre una esfera hueca de radio R, que gira alrededor de un eje vertical con una velocidad angular constante, como se indica en la figura.

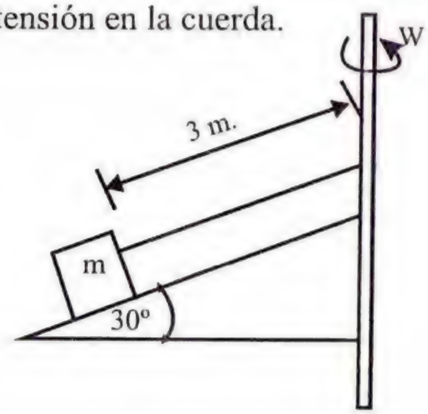
a) Dibuje el diagrama de fuerzas que actúan sobre el cuerpo de masa m en la posición indicada.

b) Determine la expresión de la velocidad angular W, en función del radio R, g y θ.

c) Demuestre que por ´más ràpido que gire la esfera hueca es imposible que el cuerpo de masa "m" alcance el diámetro horizontal de la esfera.

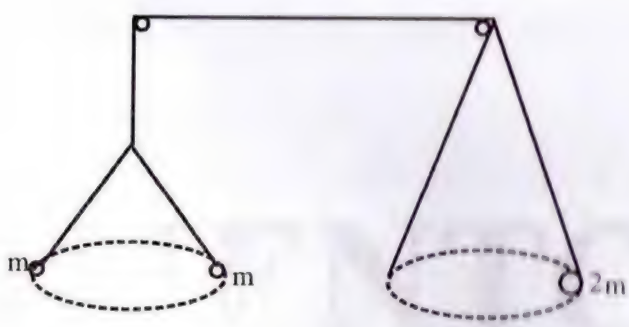


59.- Un pequeño cuerpo de 1 Kg. descanza sobre un plano inclinado, que gira alrededor de un eje vertical con una velocidad angular constante de 20 RPM- Si el cuerpo está unido al eje de rotación por medio de una cuerda, como se indica en la figura, y se considera despreciable el rozamiento entre el cuerpo y el plano. Calcule la tensión en la cuerda.



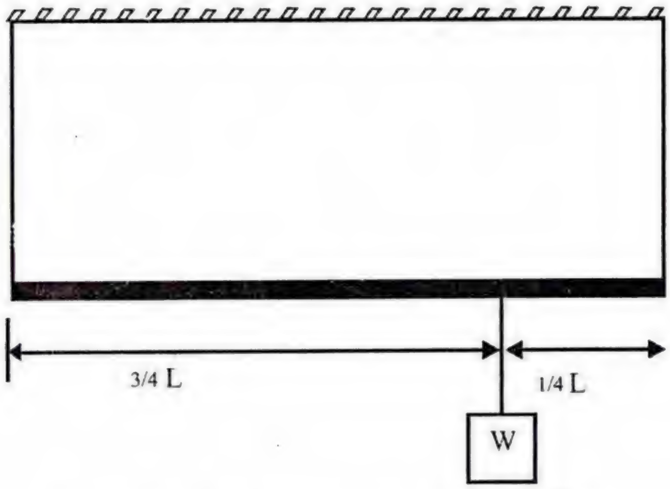
60.- En los extremos de un hilo que pasa a través de dos clavos están sujetos los pesos (como indica la figura) que se mueven circularmente. A la izquierda están dos pesas de masa m cada uno, a la derecha un peso de masa 2 m. Determinar:

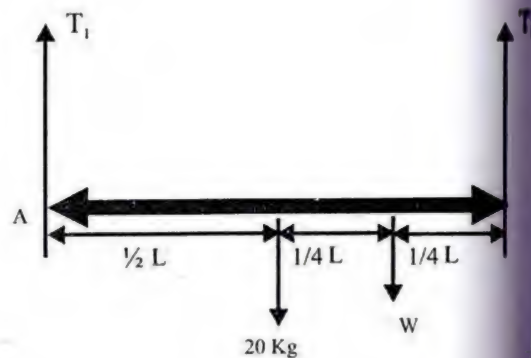
a) Si el sistema estará o no en equilibrio (es decir el hilo en su parte horizontal se mueve o no hacia uno de los extremos).
b) Si el sistema estará o no en equilibrio si solamente la rama izquierda (bloques de masa m) giran y la rama derecha (bloque de masa 2m) está solamente suspendido sin girar.



MOMENTO DE UNA FUERZA

1.- La viga horizontal de la figura es uniforme y pesa 20 kg. Determine la tensión en las dos cuerdas que soportan la viga cuando se cuelga un peso W en el punto indicado.





Solución: Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = T_1 + T_2 - 20 - W = 0$$

Para la segunda condición de equilibrio, elegimos el punto A como centro de momentos y tenemos:

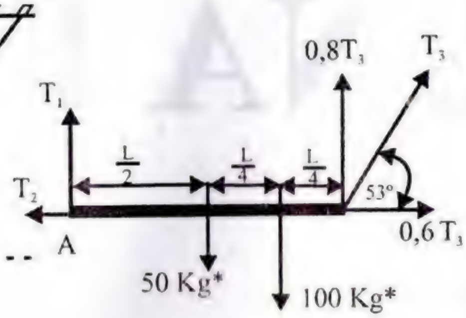
$$\sum M_A = -20L/2 - W\frac{3L}{4} + T\frac{L}{2} = 0$$

$$T_2 = 10 + 3W/4 \text{ Kg*}$$

Reemplazando este valor en la segunda ecuación nos queda:

$$T_1 = W/4 + 10 \text{ kg*}$$

2.- La barra uniforme de la figura pesa 50 kg*.- Un hombre de peso 100 kg* está en la posición indicada.- Calcule la tensión en cada una de las tres cuerdas.-



Solución: Es necesario descomponer la tensión en la cuerda T_3 y elegir el punto A como centro de momentos.- De esta manera las ecuaciones de equilibrio son:

$$\Sigma F_x = 0.6T_3 - T_2 = 0$$

$$\Sigma F_y = T_1 + 0.8T_3 - 50 - 100 = 0$$

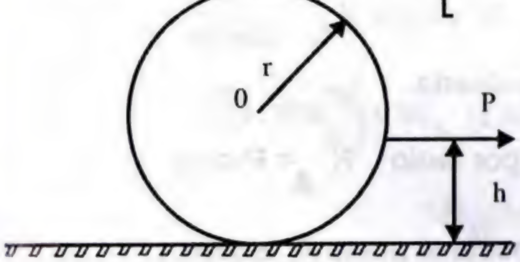
$$\Sigma M_A \overset{+}{\curvearrowleft} = -50\,\frac{L}{2} - 100\,\frac{3L}{4} + 0.8\,T_3\,L = 0$$

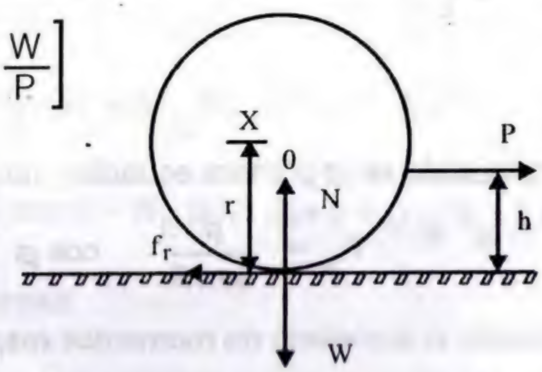
Resolviendo las ecuaciones anteriores tenemos:

$$T_3 = 125\text{ kg} \quad T_1 = 50\text{ Kg} \quad \text{y} \quad T_2 = 75\text{ kg}$$

Una esfera homogénea de radio r y peso W, resbala en el piso bajo la acción de una fuerza horizontal constante P aplicada a una cuerda, como se indica en la figura .- Si el coeficiente de fricción entre la esfera y el piso es μ, demuestre que la altura h está dada por:

$$h = r\left[1 - \mu\,\frac{W}{P}\right]$$





Solución de acuerdo a la segunda condición de equilibrio, el sumatorio de momentos respecto al centro de la esfera es:

$$\Sigma M_0 \overset{+}{\curvearrowleft} = P(r - h) - f_r\,(r) = 0$$

Por la primera condición de equilibrio:

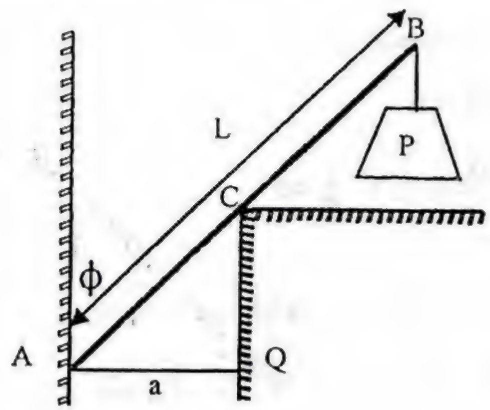
$$\Sigma F_y = N - W = 0\ ;\ N = W\ .\text{- Como } f_r = \mu\,N$$

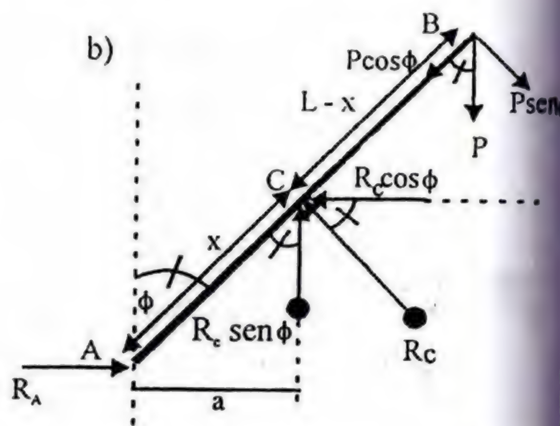
Nos queda:

$P(r - h) - \mu w(r) = 0$, de donde podemos concluir que el valor de h está dado por:

$$h = r\left[1 - \mu\,\frac{W}{P}\right] \quad \text{L.Q.Q.D.}$$

4.- Una varilla homogénea (AB) de peso despreciable y longitud L, se apoya sobre una pared vertical (A) y una esquina (C) perfectamente lisas.- En su extremo B se coloca un bloque de peso P; determinar las reacciones en los puntos de apoyo y el ángulo ϕ , para que el sistema esté en equilibrio.





Solución La figura b) - representa el diagrama de fuerzas de la varilla; y de acuerdo a la primera condición de equilibrio podemos plantear las siguientes ecuaciones:

$$① \; \Sigma F_X = 0 \; ; \; R_A = R_C \cos\phi$$

$$② \; \Sigma F_Y = 0 \; ; R_C \; \text{sen}\,\phi = P, \text{ de donde } R_C = \frac{P}{\text{sen}\,\phi}$$

Reemplazando en la primera ecuación, nos queda:

$$R_A = \frac{P}{\text{sen}\,\phi} \cdot \cos\phi \quad \text{por tanto} \quad R_A = P \,\text{cotg}\,\phi$$

Planteando el sumatorio de momentos respecto al punto A, tenemos:

$$③ \; \Sigma M_A = R_C (X) - P \;\text{sen}\,\phi \; (L) = 0$$

En el triángulo rectángulo ACQ

$$\text{sen}\,\phi = \frac{a}{X} \longrightarrow X = a/\text{sen}\,\phi$$

Reemplazando los valores de R_C y X en la ecuación

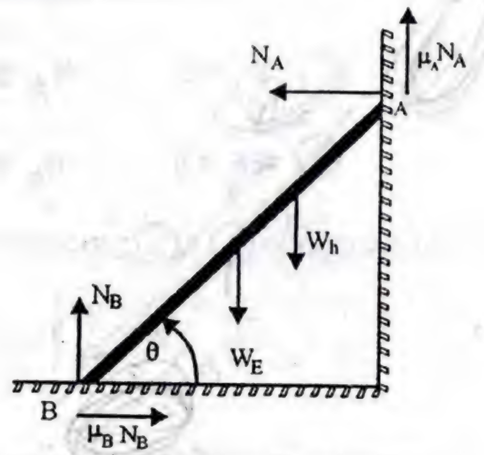
③ , tenemos:

$$③ \quad \frac{P}{\text{sen}\,\phi}\left[\frac{a}{\text{sen}\,\phi}\right] - \text{sen}\,\phi\,(L) = 0 \; ; \quad \frac{A}{\text{sen}^2\phi} = \text{sen}\,\phi\,(L)$$

de donde: $\quad \text{sen}^{-1}\left[\sqrt[3]{a/L}\right] = \phi$

En la figura se tiene una escalera uniforme que descansa sobre una pared vertical y un piso rugosos. La escalera está a punto de deslizar cuando un hombre de peso Wh, está a 3/4 de la base de la escalera.- Los coeficientes de rozamiento estático son μ_A en el muro y μ_B en el piso.- Determinar:

a) Las condiciones de equilibrio de la escalera.



Solución: De acuerdo a las dos condiciones de equilibrio se puede plantear las siguientes ecuaciones:

$$① \quad \Sigma F_x = N_A - \mu_B N_B = 0$$

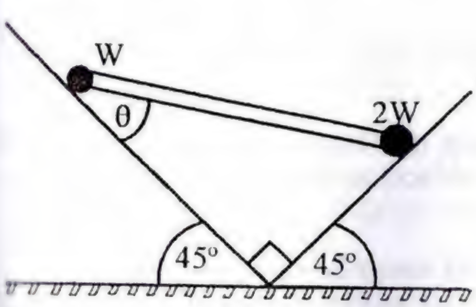
$$② \quad \Sigma F_y = \mu_A N_A + N_B - W_h - W_E = 0$$

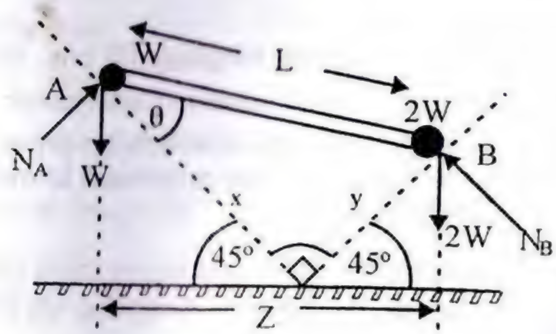
$$③ \quad \Sigma M_A^{+} = W_h\,(L/4)\cos\theta + W_E\,(L/2)\cos\theta + \mu_B N_B\,L\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$- N_B\,L\cos\theta$$

Los pesos W y 2W se encuentran fijos a los extremos de una varilla de longitud L y peso despreciable.- Se coloca la varilla como se indica en la figura.-

En ausencia de rozamiento determinar el ángulo θ, para que el sistema se encuentre en equilibrio.





Solución: Si observamos el diagrama de fuerzas del sistema considerado; vemos que es necesario plantear lo siguiente:

1.- Primera condición de Equilibrio:

$$① \quad \Sigma F_x = 0 \qquad N_A \cos45° - N_B \cos45° = 0 \qquad N_A = N_B$$

$$② \quad \Sigma F_y = 0 \qquad N_A \operatorname{sen}45° + N_B \operatorname{sen}45° - 3W = 0$$

Relacionando ① y ②, encontramos los valores de N_A y N_B

$$N_A = N_B = \left[\frac{3\sqrt{2}}{2}\right] W$$

2.- Segunda condición de Equilibrio:

$$③ \quad \Sigma M_A = 0 \qquad N_B \, L\operatorname{sen}\theta - 2W(z) = 0$$

De acuerdo al gráfico: $\quad Z = \cos 45° \, (x + y)$

$$x = L\cos\theta \qquad y = L\operatorname{sen}\theta$$

Reemplazando en ③ , nos queda:

$$N_B L\operatorname{sen}\theta - 2W\,(L\cos\theta + L\operatorname{sen}\theta)\cos45° = 0$$

Como N_B ya está definida anteriormente, se reemplaza su valor en la expresión anterior y tendremos:

$$\left[\frac{3\sqrt{2}}{2}\right] \cancel{W}\cancel{L}\operatorname{sen}\theta = 2\cancel{W}\frac{\sqrt{2}}{2}\cancel{L}(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$$

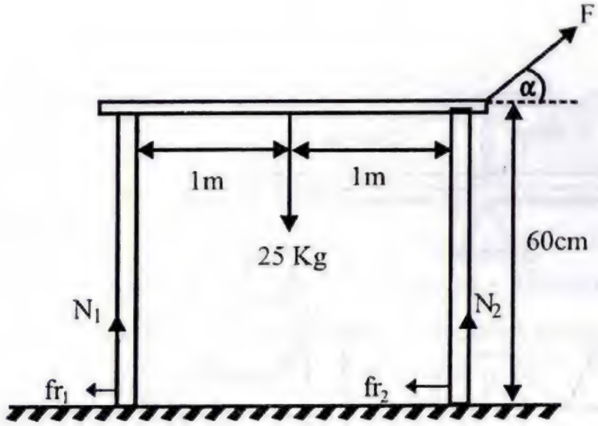
$$\tan g\,\theta = 2$$

$$\therefore \; \theta = 63.43°$$

7.- Una mesa tiene 2m de longitud, 60 cm. de altura y pesa 25Kg*, considerando su centro de gravedad en el centro.- Determinar:

a) El valor de la fuerza aplicada en un extremo y que forma un ángulo de 30° con la horizontal que arrastrará la mesa a velocidad constante sobre una superficie horizontal.

b) La fuerza que se efectúa sobre cada pata de la mesa Se conoce que el coeficiente de rozamiento dinámico es 0,20



Solución: Sea F la fuerza aplicada en uno de los extremos de la mesa.- De la misma manera N_1 y N_2 son las fuerzas que se ejercen sobre las patas de la mesa; por tanto las ecuaciones de Equilibrio son:

(1) $\sum F_x = F\cos\alpha - f_{r_1} - f_{r_2} = 0$

(2) $\sum F_y = F\text{sen}\,\alpha + N_1 + N_2 - W = 0$

(3) $\sum M_A = W(1) - 2N_2 - F\text{sen}\,\alpha \; .(2) + F\cos\alpha\,(0.60) = 0$

Teniendo en cuenta que $f_r^1 = \mu N_1$ y $f_{r2} = \mu N_2$ y colocando los datos del problema en las ecuaciones, se va a tener:

(1) $F\cos 30^\circ - \mu(N_1 + N_2) = 0$

(2) $F\text{sen}30^\circ + N_1 + N_2 = 25$

(3) $2F\text{sen}30^\circ - 0.60F\cos 30^\circ + 2N_2 = 25$

De las ecuaciones (1) y (2) se obtiene: $(N_1 + N_2)(1 + \mu\,\text{tang}\,30^\circ) = 25$

Por lo tanto, $N_1 + N_2 = \dfrac{25}{1 + \mu\,\text{tang}30^\circ} = \dfrac{25}{1 + 0.2(0.57)} = 22.42$ Kg*

Al reemplazar en la ecuación (2) se encuentra que:

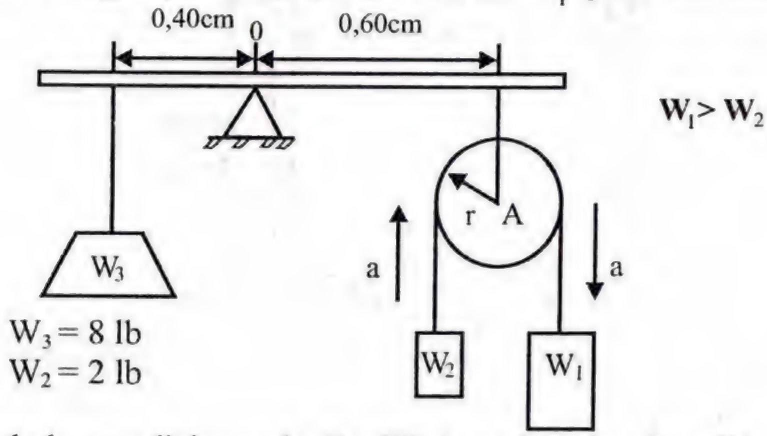
$F\text{sen}\,30^\circ + 22.42 = 25 \qquad F = 5.17$ Kg*

Resolviendo la ecuación (3) con el valor obtenido de F. Se tiene:

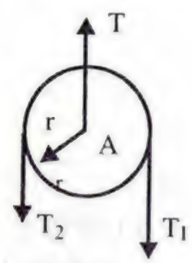
$2(5.17)\,\text{sen}\,30^\circ - 0.60(5.17)\cos 30^\circ + 2N_2 = 25$

Entonces $N_2 = 11.26$ Kg*. - Además $N_1 = 22.42 - N_2 = 11.26$ Kg*

8.- En el sistema de la figura, determinar el valor de W_1 para una condición de Equilibrio.



Solución: Aplicando las condiciones de Equilibrio en la polea de radio r, tenemos:



$$\Sigma F_y = 0 ; T - T_1 - T_2 = 0 ; T = T_1 + T_2$$

$$\Sigma M_A^{+} = T_2 (r) - T_1 (r) = 0 ; T_1 = T_2$$

Por lo tanto : $T = 2T_1 = 2T_2$

Considerando todo el sistema y calculando momentos respecto a un punto 0 de la barra, encontramos:

$$\Sigma M_A^{+} = 0 ; W_3 (0,4) - T(0,6) = 0 ; T = \left[\frac{0,40}{0,60}\right] W_3$$

$$T = (16/3)\ 1b^*$$

Si $W_1 > W_2$, existe un movimiento relativo de los dos cuerpos respecto a la polea de radio r.- En ese caso tendremos que aplicar las ecuaciones de la Dinámica: $\Sigma F_y = m.a$

Para W_2: $\quad T_1 - W_2 = \dfrac{W_2}{g} . a$

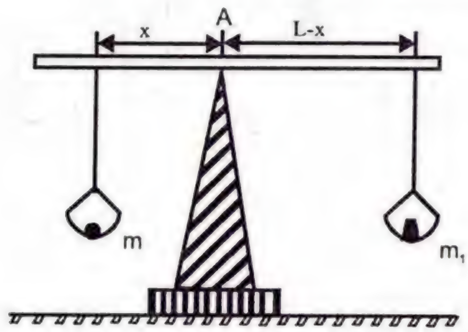
Para W_1: $\quad W_1 - T_1 = \dfrac{W_1}{g} . a$

Pero $T_1 = \dfrac{T}{2} = (8/3)\ 1b^*$

Resolviendo las tres últimas ecuaciones encontramos el valor de W_1 que estamos calculando:

$$W_1 = \frac{T_1 . W_2}{2W_2 - T_1} = 4 \quad 1b^*$$

9.-Una balanza está hecha de una barra rígida de peso despreciable y longitud, que puede girar alrededor de un punto que no está en el centro de la barra. La balanza está equilibrada por platillos de peso desigual en cada extremo de la barra.
Cuando se coloca una masa desconocida m en el platillo de la izquierda, se equilibra con una masa m_1 colocada en el plato de la derecha.- De la misma manera, cuando la masa m es colocada en el plato de la derecha el sistema se equilibra con una masa m_2 en el plato de la izquierda.- Demostrar que: $m = \sqrt{m_1 \cdot m_2}$



Solución:Considerando el primer caso, podemos plantear la condición de equilibrio correspondiente y tendremos.

$$① \quad \sum M_A^{+} = m \cdot x - m_1 (L - x) = 0$$

de donde: $\quad m \cdot x = m_1 (L - x)$

Cuando se invierta el procedimiento, es decir, al poner la masa m en el plato de la derecha, la ecuación de equilibrio del sistema de la balanza será:

$$② \quad \sum M_A^{+} = m_2 \cdot x - m \,(L - x) = 0$$

de donde: $\quad m_2 \cdot x = m(L - x)$

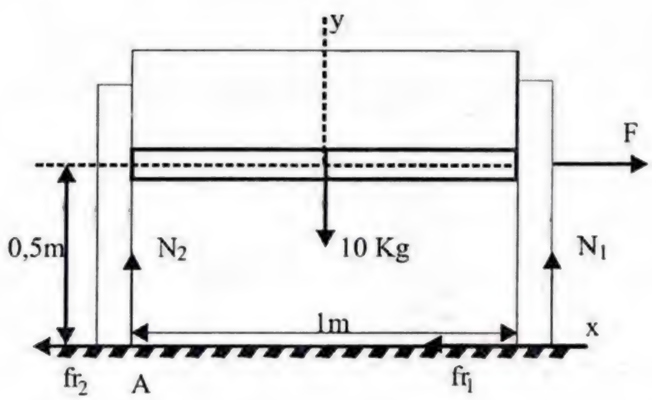
Al dividir las ecuaciones ① y ②, encontramos lo siguiente:

$$\frac{①}{②} \quad \frac{m.x}{m_2.x} = \frac{m_1 (L-X)}{m \,(L-X)}$$

$$m^2 = m_1 \cdot m_2$$

$$m = \sqrt{m_1 \cdot m_2} \qquad \text{L.Q.Q.D.}$$

10.- Se arrastra un sofá de 1 metro de largo, cuyo centro de gravedad se puede considerar a 0.50 m del suelo, con una aceleración de 2 m/s^2 sobre un piso encerado.- Si la masa es 10 Kg* y el coeficiente de rozamiento entre el piso y el sofá vale 0,2 calcule la fuerza que se está ejerciendo y las reacciones sobre sus cuatro patas.- La fuerza F se aplica a lo largo de la línea horizontal que contiene al centro de gravedad



Solución: Podemos plantear el problema, considerando un equilibrio estático en la dirección vertical y Dinámica en horizontal.- Además tomar en consideración la segunda condición de equilibrio.

Condiciones de Equilibrio

1 $\quad \Sigma F_y = 0$

2 $\quad \Sigma M_A \, (+ \curvearrowright) = 0$

Ecuación de la Dinámica

3 $\quad \Sigma F_x = m \cdot a$

De acuerdo al diagrama de fuerzas, encontramos:

1 $\quad N_1 + N_2 = 100$

2 $\quad 100(0.50) - N_1(1) + F(0.50) = 0$

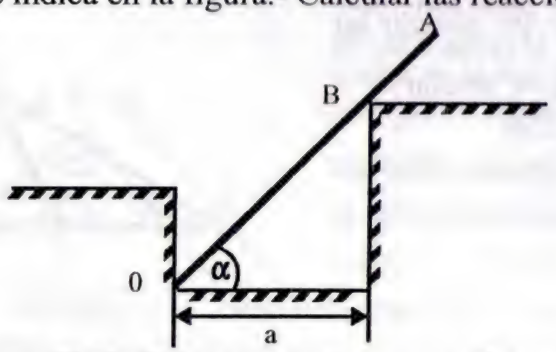
3 $\quad F - fr_1 - fr_2 = (10)\ 2$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, calculamos los valores de:

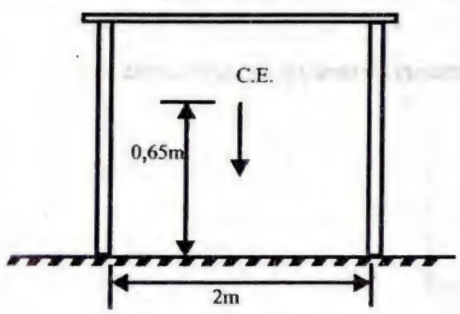
$N_1 = 70 \text{ N} \qquad N_2 = 30 \text{ N} \qquad F = 40 \text{ N}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Una varilla uniforme $\overline{OA}$ de longitud 2L y peso W, se apoya en una ranura rectangular como se indica en la figura.- Calcular las reacciones en los puntos O y B.

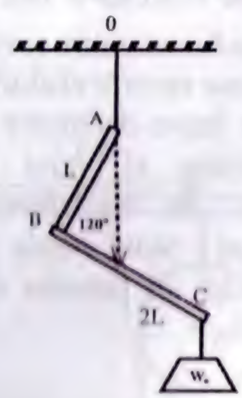


2.- Una mesa que pesa 50 Kg* tiene sus patas a una distancia de 2 metros y su centro de gravedad a 0.65 metros del piso.- Si levantamos las patas de la mesa del lado izquierdo y las apoyamos sobre una balanza de altura 36 centímetros.- Considerando despreciable toda clase de rozamiento; ¿cuánto marcará la balanza?

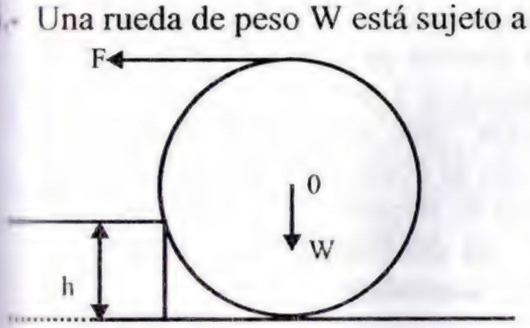


3.- Dos barras rígidas homogéneas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ de longitudes L y 2 L, de pesos W y 2W respectivamente, están unidas rígidamente en el punto B formando un ángulo de 120º en la posición de equilibrio.-

El extremo C soporta un peso Wo como se indica en la figura .- Determinar el valor de Wo, en función de W, si el punto medio de BC se encuentra en la vertical OA.



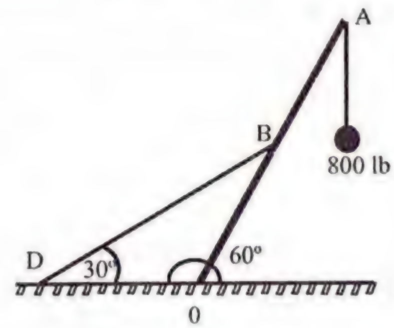
4.- Una rueda de peso W está sujeto a la acción de una fuerza horizontal F, para tratar de salvar el obstáculo de altura h como se indica en la figura.- Encuentre el valor de la fuerza F en función del peso de la rueda (w); sabiendo que h = d/4 (d es el diámetro de la rueda).-



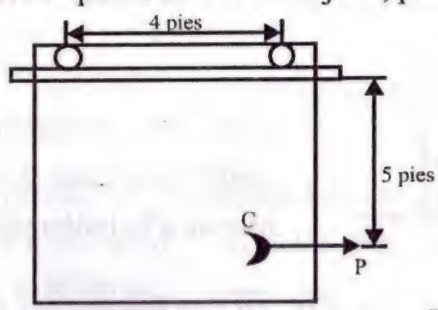
5.- Una viga uniforme de peso 100 lb* ($\overline{OA}$), articulada en el punto 0, está soportando un peso de 800 lb* en el punto A.- Para mantener la viga en la posición indicada en la figura se tiene el cable BD.- Si $\overline{OB}$ es igual a 3/4 de $\overline{OA}$.- Calcular:

a) La tensión en el cable $\overline{DB}$.

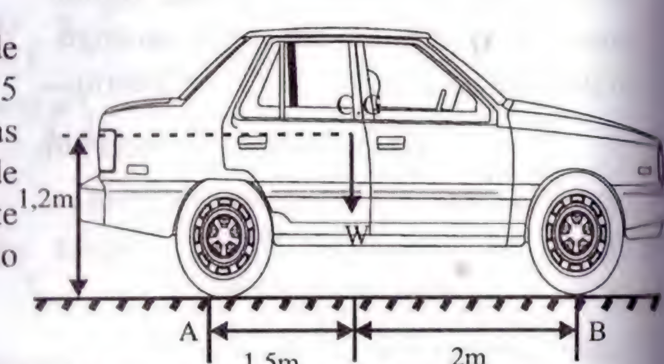
b) La reacción en la articulación, situada en el extremo inferior de la viga (punto 0).-



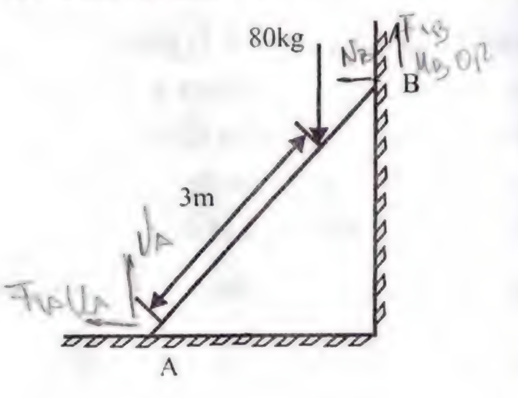
6.- Una puerta deslizante de 180 lb* de peso, está montada sobre un carril horizontal como se indica en la figura.- Los coeficientes de rozamiento estáticos entre el carril y la puerta en A y B son 0,2 y 0,3 respectivamente.- Calcular la fuerza horizontal P que debe aplicarse a la manija C, para mover la puerta hacia la derecha.



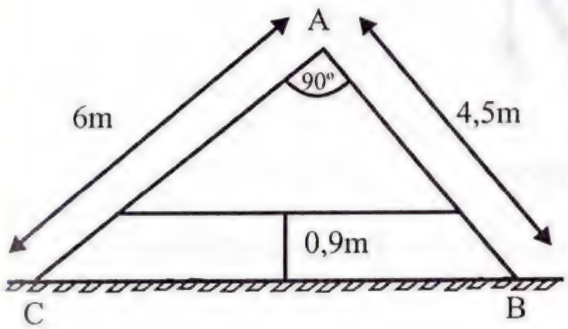
7.- Un camión que marcha a una velocidad constante de $9\vec{i}$ m/s frena bruscamente, inmovilizando sus cuatro ruedas.- La distancia que recorre el auto desde este momento hasta detenerse es 5 metros.- Calcular el valor de las reacciones y de las fuerzas de rozamiento en cada rueda durante todo el recorrido, en función del peso del camión W.-



8.- Una escalera de 4 metros de longitud y 10 kg* de peso está apoyada contra una pared vertical, como se indica en la figura. Cuando un hombre de peso 80 kg* alcanza un punto situado a 3 m del extremo inferior A, la escalera está, a punto de resbalar.- Sabiendo que el coeficiente de rozamiento estático entre la escalera y la pared es 0.2.- Determine el coeficiente de rozamiento entre el piso y la escalera.-



9.- Dos escaleras de longitudes 6m y 4.5 m respectivamente están articuladas en el punto A y unidas por una cuerda horizontal situada 90 cm por encima del suelo, como se indica en la figura.-

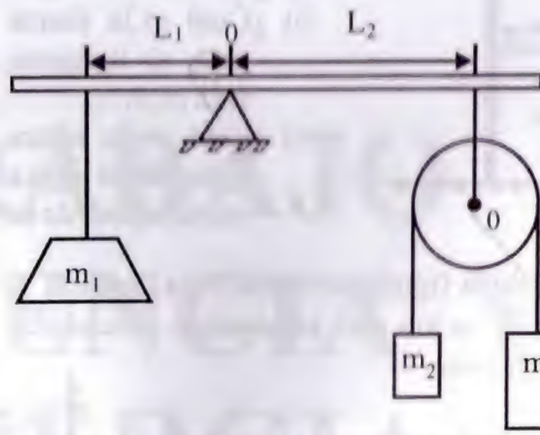


Sus pesos respectivos son: 40 y 30 kg mientras que el centro de gravedad de cada una se encuentra en sus puntos medios. Considerando que no existe rozamiento con el suelo.- Calcular:

a) La fuerza ejercida en el punto de apoyo de cada escalera.
b) La tensión de la cuerda.
c) La fuerza que una escalera ejerce sobre la otra en el punto A.
d) Si se suspende en el punto A un cuerpo de peso 100 kg* calcule la tensión en la cuerda.

10.- En el sistema de la figura, si m_3 es mayor que m_2, demuestre que:

$$m_1(m_2 + m_3).\ L_1 = 4m_2\, m_3 .L_2$$

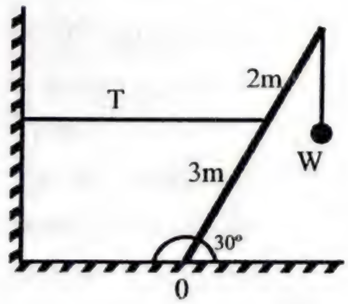


11.- Una regla de 1 m de longitud se equilibra sobre un apoyo en la división 50 cm.- Cuando se ponen dos monedas de 5 gr cada una en la marca 12 cm, se encuentra que la regla en estas condiciones se equilibra con un apoyo en la marca 45.5 cm.- Calcule la masa de la regla.-

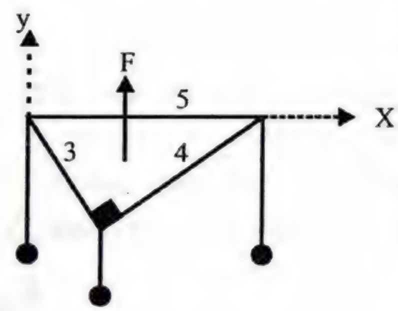
12.- Si el peso del puntal de la figura es despreciable.- Determinar:

a) El peso necesario w para producir una tensión de 200 Kg* en el cable horizontal

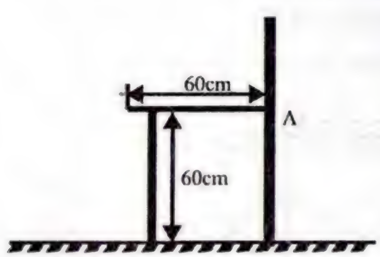
b) El valor y dirección de la fuerza ejercida sobre el puntal en el extremo inferior.



13.- De los vértices de un triángulo rectángulo cuyos lados son: 3, 4 y 5 cm. Están Cuerdas con pesos cuyo valor en gramos es igual al valor de la longitud del lado opuesto.- Si los pesos se mantienen en un mismo plano y perpendiculares a la hipotenusa del triángulo.- Determinar el punto de aplicación de F, para que el sistema se mantenga en equilibrio (desprecie el peso del triángulo).



14.- Una silla ha de ser arrastrada hacia la derecha a velocidad constante sobre una superficie horizontal, si el coeficiente de rozamiento dinámico es igual a 0.3 y el peso de la silla 25 Kg*.

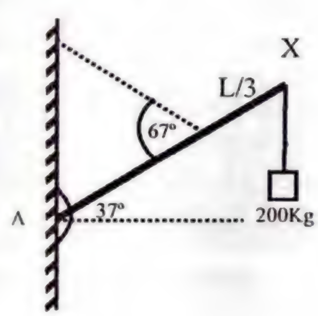


a) ¿Qué fuerza horizontal es necesaria?

b) ¿Cuál es la fuerza vertical ejercida sobre cada pata, si la fuerza que arrastra la silla está ejercida en A?

c) ¿Cuál es la altura máxima a la cual puede ser aplicada la fuerza, para que no se produzca el volcamiento de la silla?

15.1 En el sistema de la figura, determine la tensión en la cuerda y las componentes de la fuerza que actúa en el pasador ubicado en A
La viga es uniforme y pesa 100 Kg*.



TRABAJO POTENCIA Y ENERGIA

1.- Una grúa levanta un bloque de 90 N, parte desde el piso con una velocidad inicial igual a cero y llega a una altura de 9 metros en 3 segundos. Determinar:

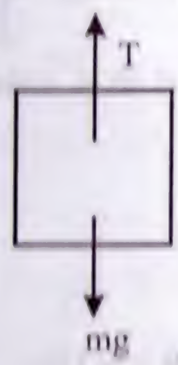
a) la aceleración con la que sube el bloque
b) El trabajo neto realizado sobre el bloque
c) El trabajo realizado para subir al bloque
d) La potencia media desarrollada, por la grúa

a) $V_0 = 0$

$Y = V_0 t + \frac{1}{2}\ at^2$

$a = 2Y/t^2 = 18\ m/9s^2$

$a = 2\ m/s^2$



b) $\Sigma F = ma$

$T - mg = ma$

$mg = 90\ N$

$m = 9\ Kg.$

$T_{Fn} = mah$

$T_{Fn} = 9Kg\ (2m/s^2)\ 9m$

$T_{Fn} = 162$ Joules

c) El trabajo para subir el bloque es el realizado por la grua por medio de la tensión del cable.

$T = ma + mg$

$T = 9Kg.\ (2m/s^2) + 90N$

$T = 108\ N.$

$T_T = T.\cos 0°\ h$

$T_T = 108\ N\ .(9m)$

$T_T = 972$Joules

d) Potencia desarrollada por la grua corresponde a la de la tensión.

$P = \frac{T}{\Delta t} = \frac{972Joules}{3seg.} = 324\ W$

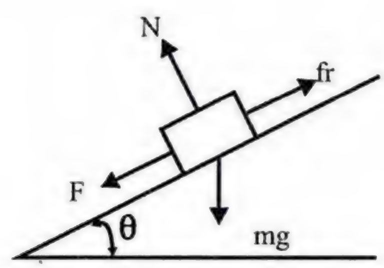
2. Determinar el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F} = 0\vec{i} - 4\vec{j}(N)$ sobre una partícula que tiene un desplazamiento $\Delta\vec{r} = 5\vec{i} + 2\vec{k}(m)$

$T = \vec{F}.\,\vec{\Delta r} = (0\vec{i} - 4\vec{j} + 0\vec{k}) . (5\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k})(N.m)$

$T = 0(Joules)$

3. a) Qué potencia desarrollará el motor de un automóvil que pesa 2 toneladas, para que baje una pendiente de 4% con rapidez constante de 15 m/s el coeficiente de rozamiento es 0,07.

b) Cuál es el trabajo neto realizado al moverse 300 m.



a) $\text{tg } \theta = 4/ 100$

$\theta = \text{arctg } (4 / 100) = 2{,}29°$

rapidez constante $\sum Fy = 0$ $\sum Fx = 0$

$\sum Fy = 0$

$N - mg \cos\theta = 0$

$N = \cos\theta \; mg$

$\sum Fx = 0$

$F + mg \,\text{sen}\theta - fr = 0$

$F - u \,mg \cos\theta + mg \,\text{sen}\, \theta = 0$

$mg = 2000 \text{ kgf}$

$F = 59{,}95 \text{ Kgf}$

$P = \vec{F}.\vec{V}$

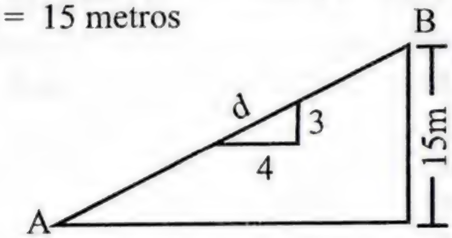
$P = 899{,}2 \text{Kgf .m/s} = 8992 \text{ W}$

b) $T_{neto} = \Delta E_{cinética} = 0$

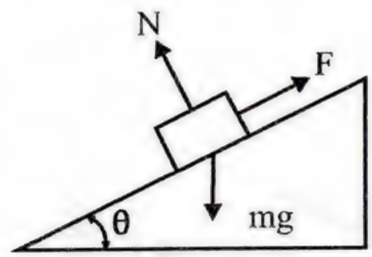
4.- Un motociclista inicia un movimiento en A con aceleración constante sobre un plano inclinado, partiendo del reposo y llega a B con una rapidez de 36 Km/h. Si la suma de las masas del motociclista y la moto es 200 Kg. Calcular :

a) La potencia media desarrollada por la moto.

Datos: h = 15 metros



La potencia desarrollada por la moto corresponde a la de la fuerza F del siguiente gráfico (fuerza motriz)



$\sum Fy = 0$

$N - mg\cos\theta = 0$

$N = mg\cos\theta$

$\sum Fx = m.a$

$F - mg\,\text{sen}\,\theta = m.a$

La aceleración puede ser calculada por cinemática.

$$a = \frac{V_B^{\,2} - V_A^{\,2}}{2.d}$$

$\text{sen}\,\theta = 3/5 = 15/d$

$d = 25m$

$a = 2\ m/s^2$

$F = m.a + m.g.\text{sen}\,\theta$

$F = m\,(a + g\text{sen}\theta)$

$F = 200Kg(2 + 10.(0{,}6))m/s^2$

$F = 1600N$

$P_m = \vec{F}.\vec{V}m$

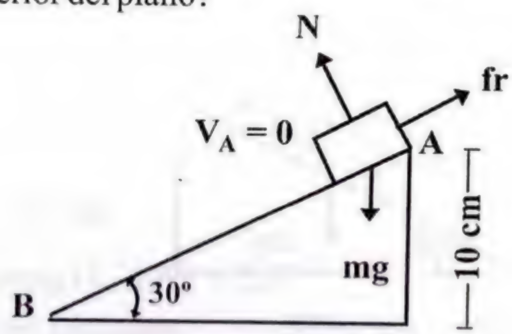
$Vm = 5m/s$

$P_m = 1600\ N. (5m/s) \cos 0°$

$P_m = 8000\ W$

5. Un cuerpo de masa 7 Kg. resbala por un plano inclinado partiendo del reposo, desde la parte superior del mismo. La rapidez del cuerpo al llegar al fondo del plano es de 1 m/s, el ángulo de inclinación del plano es de 30º y su altura 10 cm. Calcular:

a) El trabajo realizado por la fuerza de fricción.
b) La fuerza constante debido a la fricción.
c) Si se lubrica al plano inclinado y la fuerza de fricción se reduce a 1/10 de su valor inicial. ¿ Cuál será la rapidez con la que llega el cuerpo al extremo inferior del plano?



.1 $\sum Fy = 0$

$N - mg \cos30° = 0$

$N = mg \cos30°$

$d = H/\text{sen } 30° = 0{,}2m$

por cinemática

$$a = \frac{V_B^2 - V_A^2}{2.d}$$

$a = 2{,}5\ m/s^2$

$\sum Fx = m.a$

$mg\ \text{sen}30° - umg \cos30° = m.a$

$$u = \frac{-a + g\text{sen}30°}{g\cos30°}$$

$u = 0{,}289$

$T_{fr} = f_r .\cos180°.d$

T_{fr} = umgcos30° (-1).d

T_{fr} = - 0,5 Joules

b) f_r = u.N

f_r = 2,5 N

c) $\sum Fx = m.a$

$mgsen30° - u^{2}mgcos30° / 10 = m.a$

$a = g(sen30° - (u/ 10).cos30°)$

$a = 4{,}75\ m/s^2$

$V_B^2 = V_A^{\ 2} + 2.a.d$

V_B =1.3 m/s

6. Si la posición de una partícula de 1 Kg, en función del tiempo (en segundos) viene dada por: $\vec{r} = (2 + t)\vec{i} + 2\vec{j} - (3 + t^2)\vec{k}$(m), determinar la variación de la energía potencial de la partícula de t=2 (s) a t=12 (s).

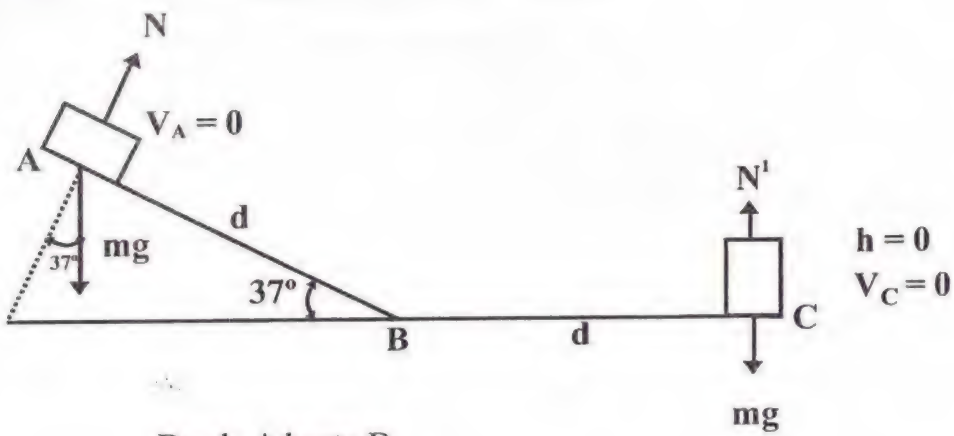
La energía potencial gravitatoria en cualquier instante será:

Ep_g = mgh, donde h será el valor de la componente en y del vector posición. Pero como la componente $(2\vec{j})$ es constante, es decir h= 2m, para cualquier tiempo, entonces:

$\Delta Ep_g = 0$, ya que Ep_g = cte = m.g.h = 1 kg. 10 m/s^2. 2m

Ep_g = 20 (Joules).

7. Un cuerpo se desliza partiendo del reposo por un plano inclinado que forma un ángulo de 37º con la horizontal, y luego continúa moviéndose en un plano horizontal hasta detenerse. Determinar el coeficiente de rozamiento suponiendo que es el mismo para las dos superficies; de tal manera que la distancia recorrida en los dos planos sea la misma.



Desde A hasta B

$\sum Fy = 0$

N - mgcos37º = 0

Desde B hasta C

$\sum Fy = 0$

N_1 - mg = 0

Balance de Energía entre A y B

$E_{MSA} = E_{MSB} - Tfr_{AB}$ (1)

Balance de Energía entre B y C

$E_{MSB} = E_{MSC} - Tfr_{BE}$ (2)

E_{MSC} es igual a cero por H=0 Vc=0

sumando (1) y (2)

$E_{MSA} = -Tfr_{AB} - Tfr_{BC}$

$E_{PA} = - fr_{AB}\ \cos 180^\circ - fr_{BC} \cos 180^\circ d$

$m . g . H = u . N . d + u . N_1 . d$

$m . g . H = u\, m. g . \cos 37^\circ d + um . g . d$

$H = d \text{ sen } 37^\circ$

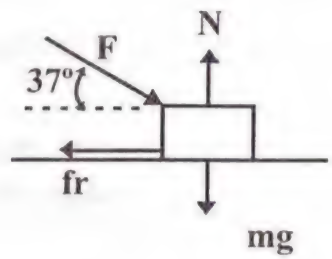
$\text{sen } 37^\circ = u(\cos 37^\circ + 1)$

$$u = \frac{\text{sen}37^\circ}{(\cos 37^\circ + 1)}$$

u = 1/3

Un bloque de 5 Kg se encuentra situado sobre una superficie horizontal, se le aplica una fuerza constante de 20 N que forma un ángulo de 37º con la horizontal, como se indica en la figura. Si el coeficiente de rozamiento único es 0,2. Determinar:

a) El trabajo neto realizado sobre el cuerpo después de 5 segundos.
b) La variación de la energía cinética.



a) $\sum Fy = 0$

$N - F \text{ sen } 37^{\circ} - mg = 0$

$N = F \text{ sen } 37^{\circ} + mg$

$\Sigma Fx = ma = F \text{ neta}$

$F \cos 37^{\circ} - fr = F \text{ neta}$

$F \cos 37^{\circ} - u\,(F \text{ sen } 37^{\circ} + mg) = F \text{ neta}$

$F \text{ neta} = 3{,}6 \text{ N}$

$$a = \frac{Fneta}{m} = \frac{3{,}6 \text{ N}}{5Kg.} = 0{,}72 \text{ m / s}^2$$

espacio recorrido en 5 segundos a partir del reposo

$d = Vot + ½\ a\,.\,t^2$

$d = 9m$

$Tneto = Fneta\,.\,\cos 0^{\circ}\,.\,d$

$Tneto = 32{,}4$ Joules

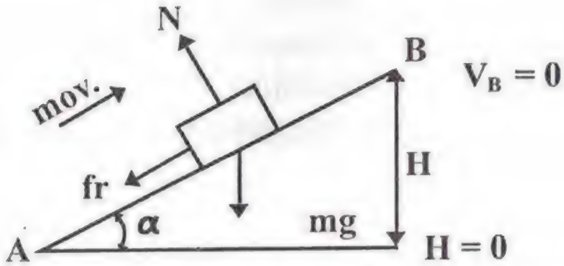
b) La variación de Energía Cinética es igual al Trabajo Neto.

$\Delta Ec = Tneto = 32{,}4$ Joules

Por la parte más baja (A) de un plano inclinado pasa un bloque arriba del plano hasta detenerse en un punto B. Conociendo que la energía mecánica total del bloque en A y en B son: 100 y 70 Joules respectivamente. Determinar:

a) El coeficiente de fricción entre el bloque y el plano
b) Analizar con la información disponible, si el bloque desciende o no luego de detenerse en B; y si baja ¿ cual es la energía cínética al pasar por B.?

Nota: $\cos \alpha = \sqrt{2} / 2$



a) Aplicando la ecuación Trabajo - Energía entre A y B

$E_{MSA} = E_{MSB} - T_{FNC}$

T_{FNC} = Trabajo de las fuerzas no conservativas.

Establecemos un nivel de referencia H= 0

$E_{MA} = E_{MB} - T_{fRAB}$

$T_{fRAB} = -30$ Joules

$T_{fRAB} = f_R \,.\, \cos 180^o \,.\, d$

$d = H/\text{sen } 45^o$

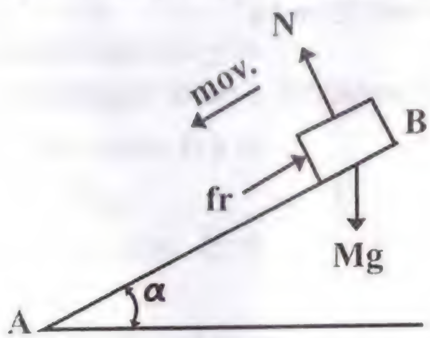
$N = mg \cos 45^o$

$-30 \text{ Joules} = u \,.\, mg \cos 45^o \,(-1)\; H/\text{sen } 45^o$

$-30 \text{ Joules} = -u \,.\, mg\; H$

$u = 3/7$

b) Suponemos el sentido del movimiento hacia abajo.



$\Sigma Fx = ma$

$mg \text{ sen } 45^o - umg \cos 45^o = ma$

$a = g(\text{sen } 45^o - u\cos 45^o)$

$a = 4 \text{ m/s}^2$

La aceleración es positiva, luego baja.

$E_{MSB} = E_{MSA} - T_{fRBA}$

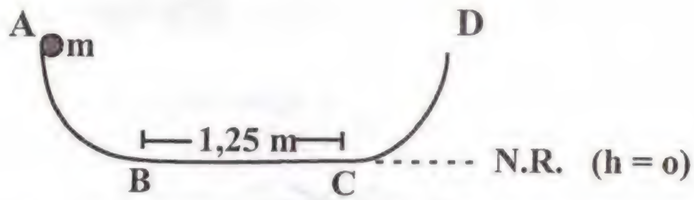
$T_{fRBA} = T_{fRAB}$ (igual u, N y d)

$E_{MSA} = 40$ Joules (al regreso)

10. La pista de la figura, está compuesta de dos tramos curvos AB y CD sin rozamiento, y el tramo recto - horizontal $\overline{BC}$ de longitud 1,25 m. Se suelta del reposo un bloque desde el punto A situado a 2 m sobre $\overline{BC}$. Considerando que existe rozamiento entre el bloque y el tramo $\overline{BC}$ (coeficiente de rozamiento 0,32). Determinar:

a) El punto (posición) donde el bloque se detendrá.

b) Hacia donde se dirigia el bloque, un instante antes de detenerse.



a) Balance de Energía entre la posición inicial y final del bloque.

$E_{Mi} = E_{Mf} - T_{fR}$

T_{fR} es la energía perdida al pasar por $\overline{BC}$ debido a la fricción.

$E_{Mf} = 0$ se detiene en el punto más bajo h = o

$mgh = f_R \cos 180^{\circ} \; d$

d es la distancia recorrida

$mgh = u \; mg \; d$

$d = 6{,}25$ m

Para recorrer esa distancia deberá pasar 5 veces por la parte plana $\overline{BC}$

b) Se detiene en el punto C y se dirigía hacia este punto.

11.- Un cuerpo de 1 kg en reposo se halla inicialmente en la posición (3, 2, 8)m. Al cabo de 5 (s) de la acción de las siguientes fuerzas, expresadas en

$\vec{F}_1 = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$; $\qquad \vec{F}_2 = 5\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k}$

$\vec{F}_3 = 15\vec{i} + 5\vec{j} + 15\vec{k}$ $\qquad m\vec{g} = -10\vec{j}$ N

Determinar:

a) El trabajo neto realizado sobre el cuerpo en los 5 (s).

b) El trabajo realizado por el peso del cuerpo en los 5 (s)

c) El trabajo realizado por $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ (F exteriores) sobre el cuerpo en los 5 (s).

d) La variación de la energía mecánica del cuerpo en el intervalo de 0Δ a 5Δ.

a) $T_N = \vec{F}_N . \Delta\vec{r}$

$\vec{F}_N = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + m\vec{g}$

$\vec{F}_N = 23\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}$ N

$\Delta\vec{r} = \vec{V}o.t + \frac{1}{2}\vec{a}.\vec{t}^{\,2}; \vec{a} = \vec{F}N/m$

$\Delta\vec{r} = 287{,}5\vec{i} + 62{,}5\,\vec{j} + 50\vec{k}$ m

$T_N = (\ 23\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}\ ) . (287{,}5\vec{i} + 62{,}5\vec{j} + 50\vec{k})$ N.m

$T_N = 7125$ Joules.

b) $Tmg = m\vec{g}.\Delta\vec{r}$

$Tmg = (\ -10\vec{j}\ . (287{,}5\vec{i} + 62{,}5\,\vec{j} + 50\vec{k})$ N.m

$Tmg = -\ 625$ Joules

c) $T_{fext} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3) . \Delta\vec{r}$

$T_{fext} = (23\vec{i} + 15\vec{j} + 4\vec{k}).(287{,}5\vec{i} + 62{,}5\,\vec{j} + 50\vec{k})$ N . m

$T_{fext} = 7750$ Joules.

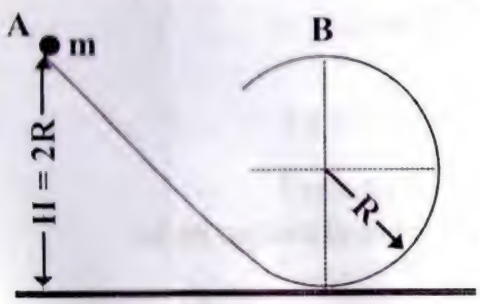
$E_{Mi} = E_{mf} - T_{FNC}$; T_{FNC} = trabajo de las fuerzas no conservativas.

d) $E_{Mi} = E_{MF} - T_{Fex}$

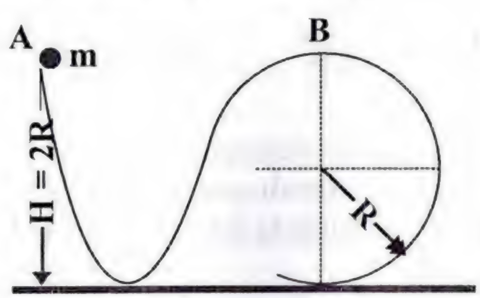
$\Delta\, E_M = E_{MF} - E_{Mi} = T_{Fex}$

$\Delta\, E_M = 7750$ Joules.

12. Si en los rizos de las figuras (a) y (b) se abandona una misma part
desde la posición A. ¿En cada uno de los casos la partícula llegará al punto
Explique su respuesta. Desprecie cualquier tipo de rozamiento.



(a)



(b)

a) $E_{MA} = E_{MB}$

$E_{PA} = E_{PB} + E_{CB}$

$E_{CB} = 0$

$\frac{1}{2}\ m V_B^2 = 0$

$V_B = 0$, la partícula no podrá llegar a B, puesto que para hacerlo necesita tener en esta posición una rapidez mínima (rapidez crítica $= \sqrt{Rg}$)

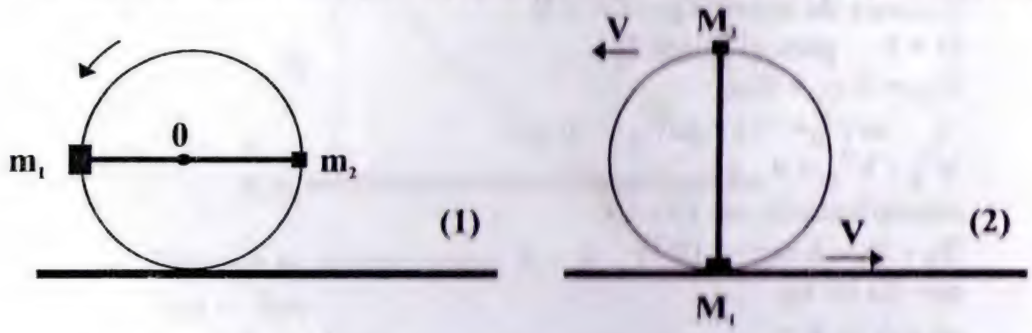
b) $E_{MA} = E_{MB}$

$E_{PA} = E_{PB} + E_{CB}$

$E_{CB} = 0$

$V_B = 0$, sí podrá llegar a B, puesto que sobre la pista puede pasar por B con cualquier velocidad, inclusive $V_B = 0$

13. Una varilla de longitud "L" y masa despreciable, en cuyos extremos se sujetan las masas m1 y m2, se suelta desde la posición horizontal y el sistema empieza a girar alrededor de un eje fijo situado en el punto medio de las masas. Cuando la varilla pasa por la posición vertical, calcule la rapidez de la partícula.



Balance de Energía Mecánica del sistema para la situación inicial y final,
Sistema $m_1 + m_2$ + Varilla
Varilla de masa despreciable no suma energías.

$E_{Msi} = E_{Msf}$

$E_{p1i} + E_{p2f} = E_{c1f} + E_{p1f} + E_{c2f} + E_{p2f}$

Tomamos como nivel de referencia el punto más bajo del sistema la Rapidez de las dos masas es la misma.

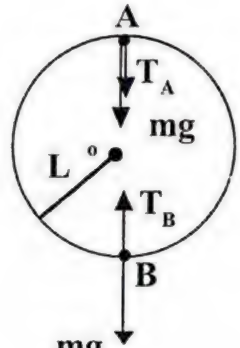
$E_{p1f} = 0$

$m_1 g \cdot L/2 + m_2\ g \cdot L/2 = \frac{1}{2}\ \cdot m_1 V^2 + \frac{1}{2}\ \cdot m_2 V^2 + m_2 gL$

$m_1 = 2 m_2$ reemplazando en la ecuación anterior y simplificando :

$V = \sqrt{gL/3}$

14. Una piedra atada a una cuerda de longitud L, se desplaza por una trayectoria circular en un plano vertical. Determinar la masa m de la piedra sabiendo que la diferencia entre la tensión máxima y la mínima de la cuerda es igual a 10 N.



$\Sigma F_B = Fc_B$

$T_B - mg = Fc_B$ (1)

La tensión es mínima en A.

$\Sigma F_A = Fc_A$

$T_A + mg = Fc_A$ (2)

$T_A + mg = Fc_A$

Restando (1) - (2) y sustituyendo Fc por mV^2/R

$T_B - T_A = (m/L)(V_B^2 - V_A^2) + 2mg$ (3)

Balance de energía para A y B

$H = 0$ para el punto B

$E_{CB} = E_{CA} + E_{PA}$

$\frac{1}{2} . mV_B^2 = \frac{1}{2} . mV_A + mg L$

$V_B^2 - V_A^2 = 4 . gL$

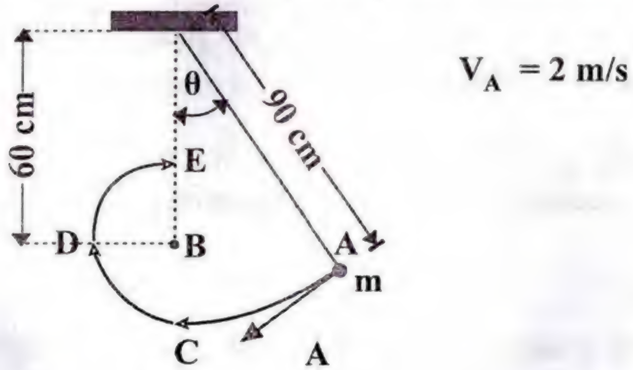
reemplazando en (3)

$T_B - T_A = 6 mg = 10 N$

$m = 10 N/ 6g$

$m = 0,16 Kg.$

5. Una esfera atada a una cuerda parte del punto A con una rapidez inicial de 2 m/s. En la parte más baja, la cuerda choca con una barra fija situada en B, perpendicular al plano de oscilación de la esfera. Encontrar el mínimo valor del ángulo θ para que la esfera pase por el punto E. indicado en la figura.

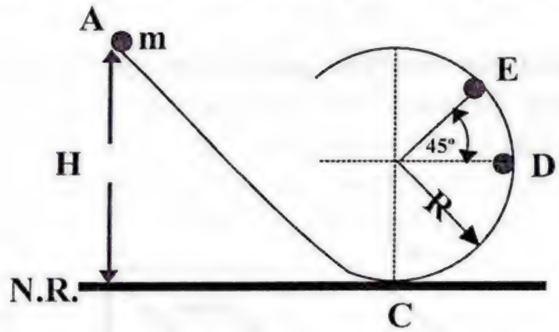


Tomamos como N. R, el nivel del punto C.

$E_{MA} = E_{ME}$

$E_{PA} + E_{CA} = E_{PE} + E_{CE}$
$mgh_A + \frac{1}{2} m V_A^2 = mgh_E + \frac{1}{2} V_E^2$ (mínima)
$h_A = 90 - 90 \cos \theta cm. = 0{,}9 (1 - \cos \theta)$
$V_A = 2$ m/s
$h_E = 60$ cm $= 0{,}6$ m
$V_E = V_{crítica} = \sqrt{Rg} = \sqrt{0{,}3 (10)} = \sqrt{3}$ m/s
$\cos \theta = 3{,}5/9$
$\theta = 67{,}11^{\circ}$

16 Un pequeño bloque de masa "m" se suelta desde A sobre la pista lisa de la figura. Determinar en función de R:
a) El valor de H, para que el bloque se separe de la pista en E.
b) La distancia horizontal donde caería el bloque, medida desde C.
c) La reacción de la pista sobre el bloque en el punto horizontal D.



a) Balance de energía entre A y E
$E_{MA} = E_{ME}$
$E_{pA} = E_{pE} + E_{CE}$
$mgH = \frac{1}{2} . mV_E^2 + mg\, h_E$ (1)
$h_E = R + R \operatorname{sen} 45^{\circ}$ (2)
$\Sigma Fr_E = Fc_E$
$mg \operatorname{sen} 45^{\circ} + N_E = Fc_E$
$N_E = 0$ si el bloque se separa de la pista.
$V_E^2 = Rg \operatorname{sen} 45^{\circ}$ (3)
Reemplazando (2) y (3) en (1)
$H = R(1 + 3\sqrt{2})$

b) $V_{Ex} = \sqrt{R.g.\operatorname{sen}45^{\circ}} . \cos 45^{\circ}$ (4)
$X = V_{Ex} . t$ (5)
$Y = V_{EY} t - 1/2 . g . t^2$ (6)
$Y = -hE = -R - R \operatorname{sen} 45^{\circ}$
$V_{Ey} = \sqrt{R.g.\operatorname{sen}45^{\circ}} . \operatorname{sen}45^{\circ}$
reemplazando en (6) obtenemos el valor de t

$t = 1{,}03\ R$ seg.

Reemplazando (4) y el t en (5)

$x = 1{,}9\ R$

Distancia desde $C = X - R \cos 45^o$

$C = 1{,}2\ R$

c) $\Sigma Fr_D = Fc_D$

$$N_D = \frac{mV_D^2}{R}$$

Balance de energía entre A y D

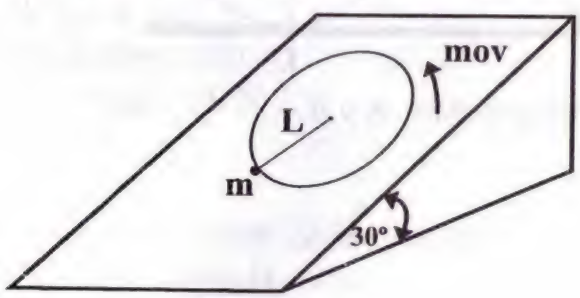
$Ep_A = Ec_D + Ep_D$

$mg\,(1+3\sqrt{2}\,)R = \frac{1}{2}\, mV_D^2 + mg\,R$

$V^2_D = 6\sqrt{2}\ Rg$

$N_D = 6\sqrt{2}\ mg$

17. En un plano inclinado sin fricción que forma un ángulo de 30º con la horizontal, un cuerpo de masa "m" está girando atado a una cuerda de longitud "L" generando una circunferencia, como se indica en la figura Demostrar que la tensión en el punto más bajo excede a la tensión en el punto más alto en tres veces el peso del cuerpo.



(A) $\Sigma Fr = m\, V_A^2 / R$

$T_A + mg \text{ sen } 30^o = mV_A^2 / R$

(B) $\Sigma Fr = mV^2_B$

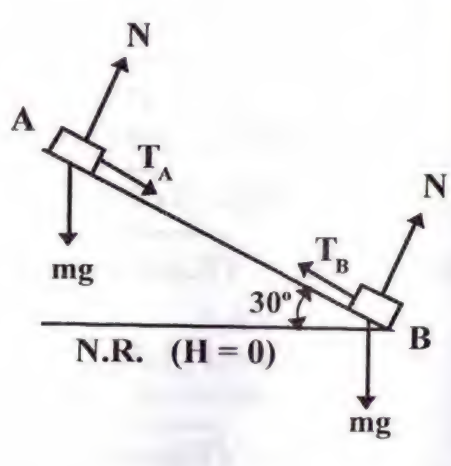
$T_B - mg \text{ sen } 30^o = mV_B^2 / R$

$E_{MSA} = E_{MSB}$

$Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B$

$\frac{1}{2}\, mV_A^2 + mgh = \frac{1}{2}\, mV_B^2$

$V_A^2 = V_B^2 - 2g\,R$



$$T_A + mg \text{ sen} 30^o = \frac{m\,(V_B^2 - 2gR)}{R}$$

$T_A + mg/2 = T_B - mg/2 - 2mg$

$T_B = T_A + 3\ mg.$

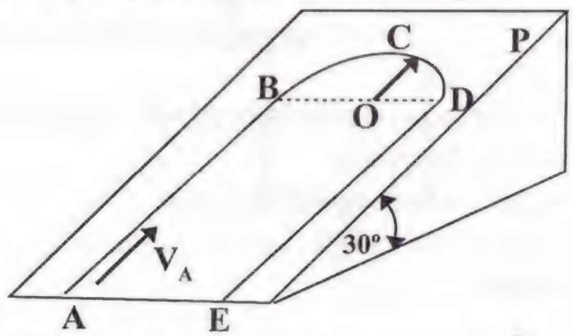
18. El plano P es totalmente liso y forma un ángulo de 30º con la horizontal. Una pista ABCDE totalmente lisa se coloca sobre el plano inclinado como se indica en la figura. Los tramos $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ son tramos rectos y miden 60 cm cada uno; el radio de la semi-circunferencia es 20 cm. Determinar:

a) La mínima rapidez con la que se debe lanzar una bola, por el interior de la pista, desde A para que no se separe de ella en ningún instante.

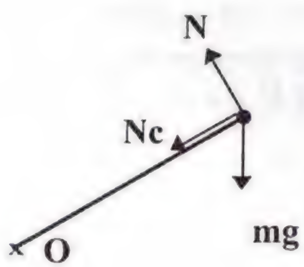
b) La fuerza resultante que actúa sobre la bola, en el instante que pasa por el punto C.

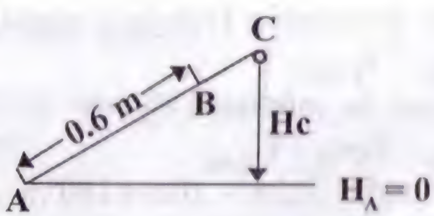
c) El valor de la fuerza centrípeta en el punto C.

d) Los tipos de energía que tiene la bola en los puntos A,B,C,D, y E.



a) La normal ejercida por la pista en el punto C es igual a cero para que se encuentre en la situación límite.





$\Sigma Fr_C = Fcc$

$N_C +$ mg sen 30º = Fc_c

mg sen 30º = mV_C / R

R=0,2m

$V_{Cmin} =$ 1 m/s

Balance de energía entre A y C

$Ec_A = Ec_c + Ep_c$

$\frac{1}{2} m V_A^2 = \frac{1}{2} m V_C^2 + m.g.Hc$

Hc = (0,6 + 0,2) m. sen 30º = 0,4 m

V_A=3m/s.

b) $\Sigma F_{RC} = F_{Cc} = mg \text{ sen } 30°$

(Nc = 0, N y mg cos 30° se anulan)

c) $F_{cc} = m\,(1 m/s)^2 / 0{,}2\ m = 5m\ (m/s\ )$

d) Energía Cinética: A, B, C, D, E.

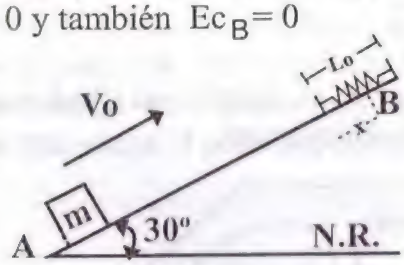
Energía Potencial: B, C, D.

19. Desde la base de un plano inclinado se lanza un cuerpo de 1 kg. con una rapidez de 12 m/s. En la parte más alta del plano se encuentra un resorte ideal de masa despreciable, cuya constante es 200 N/m. Cuando el bloque choca contra el muelle que tiene una longitud normal de 60 cm le comprime hasta que su longitud es 50 cm. El coeficiente de rozamiento único entre el bloque y el plano es 0,2. Determine:

a) La distancia que recorre el bloque desde el punto A, hasta detenerse momentáneamente arriba del plano.

b) La energía total del cuerpo en la posición anterior.

c) La rapidez con la que pasa el cuerpo de regreso por el punto A. En el punto B, $V_B = 0$ y también $Ec_B = 0$



a) Aplicando la ecuación Trabajo- Energía entre A y B

$Ec_A = E_{MB} - T_{F.N.C.}$

Para un nivel de referencia $H_A = 0$

$Ec_A = Ep_B + Epe_B - T_{fRAB}$

$½.mV_A^2 = mgH + ½.kx^2 - fRcos\ 180°.d_{AB}$

$fr = u.mgcos30°$

$H = d_{AB}$ sen 30°

reemplazando en la ecuación anterior

$d_{AB} = 9{,}21$ m.

b) El sistema está formado por el resorte y la masa, la energía del cuerpo es solamente mgH, está detenido H = 4,6 m

$E_P = 46$ Joules

.3 Balance de Energías entre B y A.

$E_{MSB} = E_{MSA} - T_{FRAB}$

$Ep_B + Epe_B = Ec_A - f_{RBA}cos\ 180°.d$

$mgH + ½\ kx^2 = ½\ .mV_A^2 + umg\ cos\ 30°\ .d$

x = 0,1m

u = 0,2

$V_A = 8{,}95$ m/s.

0. En el arreglo de resortes de la figura, determinar:

a) La constante equivalente del sistema (ke)

b) El trabajo desarrollado por la fuerza F.

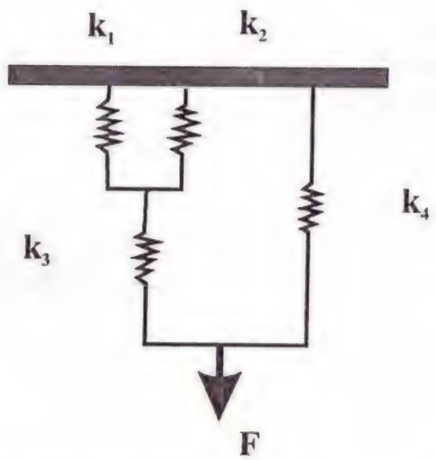
$k_1 = 100$ N/m

$k_2 = 1000$ N/m

$k_3 = 900$ N/m

$k_4 = 505$ N/m

F = 500 N



a) Los resortes (1) y (2) están en paralelo, entonces

$k_{1\text{-}2} = k_1 + k_2 = 1100$ N/m

$k_{1\text{-}2}$ y k3, están en serie, por lo que

$k_{(1\text{-}2)\text{-}3} = (k_{1\text{-}2}\ k3) / (k_{1\text{-}2} + k3) = 495$ N/m

$k_{(1\text{-}2)\text{-}3}$ y k4 están en paralelo,

$k_{(1\text{-}2)\text{-}3)\text{-}4} = ke = k_{(1\text{-}2)\text{-}3} + k4 = 1000$ N/m

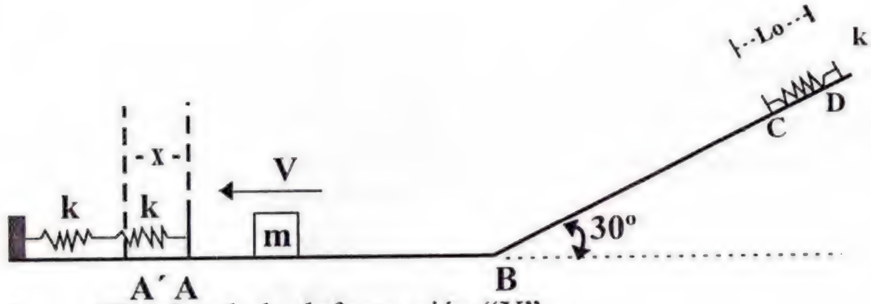
b) $T_F = \frac{1}{2}\ ke x_T^2$; x_T = deformación total del sistema

$F = ke.x_T \qquad x_T = F/ke = 0{,}5(m)$

$T_F = \frac{1}{2}.1000\ (N/m)\ (0{,}5\ m)^2$

$T_F = 125$ Joules.

Se lanza un cuerpo de masa 1 kg sobre el sistema de resortes de la figura, de tal forma que lo comprime una distancia "X". Luego el cuerpo regresa, recorriendo la superficie horizontal lisa $\overline{AB}$; sube por el plano inclinado que es rugoso (μ = 0,25) comprimiendo 10 cm al resorte de la derecha. La constante "k" es la misma para cada resorte y tiene un valor de 1000 N/m. Se conoce además que la distancia $\overline{BC}$ mide 15,9m. Determinar:



a) El valor de la deformación "X"

b) La energía total del cuerpo al pasar nuevamente por el punto B.

a) Para la pista AB el sistema es conservativo

$E_{peA} = E_{MSB}$

Sea el punto D donde instantáneamente se detiene el bloque, comprimiendo el resorte superior. El sistema de B a D es disipativo

$E_{MSB} = E_{MSD} - T_{frBD}$

$Epe_A = Ep_D + Epe_D - T_{frBD}$

$Fr = uN$

$N = m.g.\cos 30º$

Los resortes en A se encuentran en serie:

$1/k + 1/k = 1/ks$

$ks = 5000\ N/m$

$½ .ks.X^2 = m.g.H_D + ½\ k.x_1^2 - (umg \cos 30º)\cos 180º .d$

$x_1 = 0{,}1m$ $k = 1000N/m$ $u = 0{,}25$ $d = 16m$

$H_D = 8m$ $x = 0{,}69m$

b) Balance de energía entre D y B

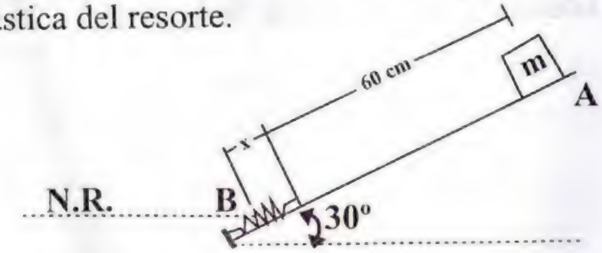
$E_{MSD} = E_{MSB} - T_{frDB}$

$E_{MSB} = E_{MSD} + T_{frDB}$

$E_{MSB} = m.g.H_D + ½.K.X_1^2 + (umg \cos 30º) \cos 180º.d$

$E_{MSB} = 50{,}35\ J$

22. Se suelta un bloque de 10 Kg. desde lo alto de un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal y de longitud 60 cm. El bloque choca contra un resorte ideal y lo deforma 10 cm. Conociendo que el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es de 0,3; determine la constante elástica del resorte.



Sea el punto B donde se detiene instantáneamente por primera vez el bloque comprimiendo al resorte 0,1 m El nivel de referencia se coloca en el punto B.

Balance de energía entre A y B

$E_{MSA} = E_{MSB} - Tfr$

$E_{PA} = Epe_B$ - fr.cos 180º.d

$MgH_A = ½ kx^2 +$ umg cos 30º .d

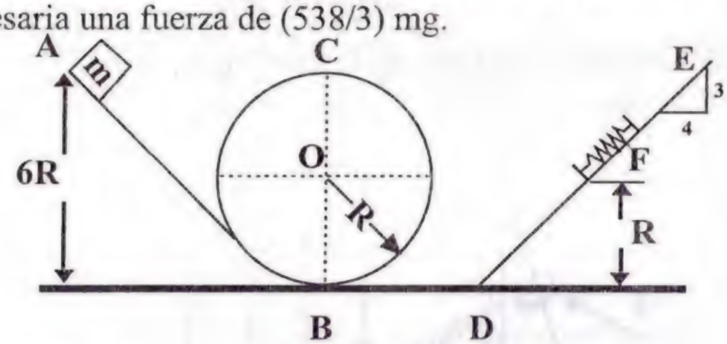
d =0,7m; H_A= d sen 30º = 0,35 m

k= 3362,7 N/m

La pista de la figura es lisa, con excepción del tramo DE que es rugosa. Un cuerpo de masa "m" se deja caer desde el punto A. Si el resorte se comprime una distancia igual a R/10 Determinar:

a) El coeficiente de rozamiento en el plano rugoso.
b) La lectura de una balanza colocada en el punto C.

NOTA. Se conoce además que para estirar el resorte una distancia igual a R/ es necesaria una fuerza de (538/3) mg.



a) Es un sistema conservativo de A hasta D.

$E_{MSA} = E_{MSD}$

Ubiquemos un punto F donde el bloque se ha detenido momentáneamente comprimiendo al resorte.

Balance de energía entre D y F.

$E_{MSD} = E_{MSF} - T_{frDF}$

$Ep_A = Ep_F + Epe_F$ - fr.cos180º. d

$mgH_A = mgH_F + ½ kx^2 +$ umg cosθ.d (1)

θ = 36,8º sen θ = 3/5 cos θ = 4/5

d=R / senθ = 53R/50

x=R/10 H_A=5R

$$k = \frac{F_1}{X_1} = \frac{538\ mg}{3(R/4)} = 2512\ mg/3R$$

Reemplazando en (1)

u =0,25

b) La balanza marcará la normal en ese punto

$\Sigma Fr_C = Fc_C$

$$N_C + mg = \frac{MV_C^2}{R}$$

Balance de energía entre A y C

$E_{MSA} = E_{MSC}$

$Ep_A = Ep_C + Ec_C$

$MgH_A = mgH_C + ½ .mVc^2$

$V^2_C = 6R.g$

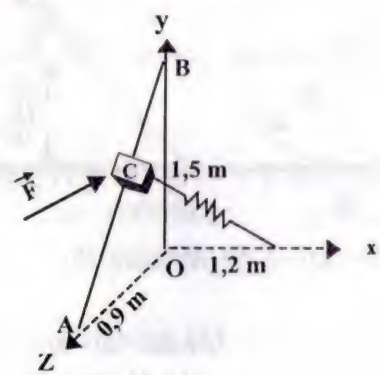
Reemplazando en (2)

$N_C = 5$ mg

24. El cursor deslizante C de masa 2,5 Kg lleva un resorte y se mueve desde A hasta B a lo largo de la barra fija; bajo la acción de una fuerza externa constante $\vec{F} = 20\vec{i} + 30\vec{j} - 20\vec{k}$ (N) y la fuerza de rozamiento. El cursor tiene en A una rapidez de 1,80 m/s y al llegar a B de 2,40 m/s. La costante del resorte es k = 30 N/m y su longitud natural (no deformado) es 0,90m. Determinar

a) La variación de la energía mecánica total entre los puntos A y B.

b) La energía perdida por rozamiento.



a)

$\Delta E_{M(A-B)} = E_{MB} - E_{MA}$

$\Delta E_M = E_{CB} + Ep_B - Ec_A - Epe_A$

$Ec_B = \frac{1}{2} m\, V_B^2 = \frac{1}{2}(2{,}5Kg)(2{,}4\ m/s)^2 = 7{,}2$ J

$Ep_B = mgh = (2{,}5Kg)(10m/s^2)(1{,}5m) = 37{,}5$ J

$Epe_B = \frac{1}{2} kx_B^2 = \frac{1}{2}(20N/m)(\sqrt{1{,}2^2 + 0{,}9^2} - 0{,}9)^2 m^2 = 15{,}6$ J

$Ec_A = \frac{1}{2} mV_A^2 = \frac{1}{2}(2{,}5Kg)(1{,}8m/s)^2 = 4{,}05$ J

$Epe_A = \frac{1}{2} kx_B^2 = \frac{1}{2}(30N/m)(\sqrt{1{,}2^2 + 0{,}9^2} - 0{,}9)^2 m^2 = 5{,}4$ Joules

$\Delta E_M = 50,85$ Joules

b) $E_{MA} = E_{MB} - T_{FNC}$ FNC : F y fr

$E_{MA} = E_{MB} - T_F - T_{fr}$

$T_{fr} = (E_{MB} - E_{MA}) - T_F = E_M - T_F$

$T_F = \vec{F}.\overrightarrow{\Delta r} = (20\vec{i} + 30\vec{j} - 20\vec{k}) - (0\vec{i} + 1.5\vec{j} - 0.9\vec{k})$ N.m

$T_F = 63$ J

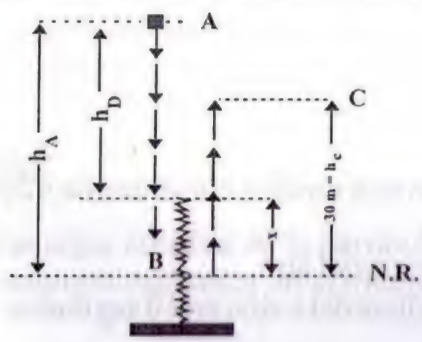
$T_{fr} = 50,85 - 63 = - 12,15$ J

Se pierden 12,15 J por efecto del rozamiento

25. Un bloque de 10 kg cae desde una determinada altura sobre un resorte cuya constante es k = 200 N/m, comprimiéndole una distancia X. Impulsado por el resorte el cuerpo asciende hasta una altura de 30 m, medida desde la posición de máxima compresión del resorte. Entre el bloque y el aire hay una fuerza de fricción de 20 N. Calcular:

a) La altura desde la que se soltó el bloque, medida desde la posición de máxima compresión del resorte.

b) La rapidez con la que el bloque toca el resorte al momento de caer.



a) N.R. coincidente con B

$E_{MB} = E_{MC} - T_{fr}$

$Epe_B = Ep_C - fr.hc.\cos 180^o$

$\frac{1}{2}.kx_B^2 = mghc - fr.h .\cos 180^o$

$x_B = 0,6$m

$E_{MA} = E_{MB} - T_{fr}$

$Ep_A = Epe_B - fr.h_A.\cos 180^o$

$mgh_A = \frac{1}{2}.kx_B^2 fr.h_A .\cos 180^o$

$h_A = 45$m

b) $hp = h_A - X = 44,4$ m

$E_{MA} = E_{MD} - T_{fr}$

$Ep_A = Ec_D + Ep_D - fr.h_D.\cos 180^o$

$mgh_A = \frac{1}{2}.m V_D^2 + mgX - fr.h . \cos 180^o$

$V_D = 26,6$ m/s

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Un motor que tiene un rendimiento del 90 % mueve una grúa cuyo rendimiento es del 40%.
a) Con qué rapidez levantará la grúa una masa de 500kg, si se aplica al motor una potencia de 5kw.
b) La magnitud de la fuerza realizada por la grúa para levantar el bloque.

2.- Un bloque de masa 100 kg., es llevado por una máquina hacia arriba de una colina con una rapidez constante de 1 m/s; si la colina forma un ángulo de 37° con la horizontal y el coeficiente de fricción es 0,4 entre las superficies en contacto.
a) ¿Cuál es el trabajo hecho sobre el bloque al moverse 10 metros hacia arriba de la colina?
b) ¿Cuál es la potencia de la máquina en CV. y HP?
c) ¿Cual es el trabajo resistente realizado sobre el bloque en los 10 m.
d) ¿Cual es el trabajo neto realizado sobre el bloque?

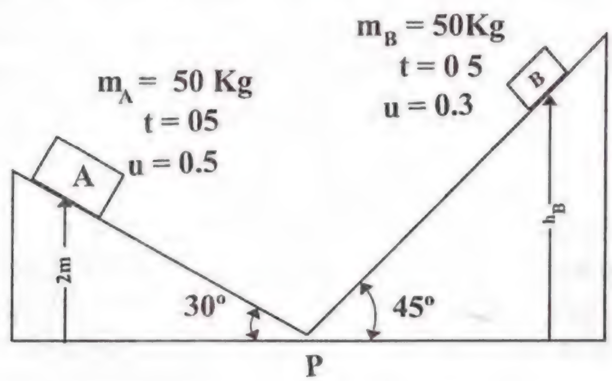
3.- Un auto de masa 1500 kg sube por una carretera recta, cuya pendiente es del 5% Al instante = 0 s tiene una rapidez de 36 km/h, Qué potencia debe desarrollar el motor considerando una eficiencia mecánica de 90% para que en 5 segundos, alcance una rapidez de 54 km/h. Considerando una resistencia total al movimiento de 1/10 del peso del auto.

4.- Un avión vuela hacia el norte con una rapidez constante de 420 km/h, la potencia de las turbinas es de 200 H. P. Calcular:
a) El valor de la fuerza de resistencia del aire.
b) El trabajo que realizan las turbinas del avión en 10 segundos.
c) El trabajo neto sobre el avión.

5.- Un vehículo cuya masa es 1000 kg sube un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal, una distancia de 100 m a 36 Km/h. La fuerza de fricción vale 2000 N. Determinar.
a) La fuerza (magnitud) desarrollada por el motor
b) La potencia del motor en HP
c) El trabajo neto realizado sobre el vehiculo en el trayecto de los 100 m.

6. Los cuerpos A y B parten del reposo al mismo instante
Determinar:

a) ¿De que altura h_B debe partir B para que choque con A en P?
b) El trabajo realizado por los pesos de A y B desde t=0 hasta que chocan en P.



7. Una partícula de 5 kg parte del reposo y se mueve durante 10 s bajo la acción de las siguientes fuerzas:

$$\vec{F}_1 = 50N\,(0{,}70\vec{i} - 0{,}70\,\vec{j} - 0{,}14\vec{k})$$
$$\left|\vec{F}_2\right| = 20N;\ \vec{u}_{F_2} = (-\,0{,}3\vec{i} - 0{,}60\,\vec{j} + n\vec{k})$$

y su peso. Determinar:

a) La variación de energía cinética de la partícula durante los 10 segundos.
b) La variación de energía mecánica en el mismo intervalo de tiempo.

8. Un cuerpo de masa "m" se desliza partiendo del reposo hacia abajo de un plano inclinado rugoso que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Si el 70% de la energía mecánica total inicial se disipa durante el descenso en forma de calor, calcular el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano inclinado.

9. Un bloque de masa 1 Kg es disparado hacia arriba de un plano inclinado 20°, pasando por la base del plano (A) con una velocidad Vo. Si el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano es 0,2; y si el tiempo que utiliza el bloque hasta detenerse en la parte más alta del plano es 1 s. Calcular

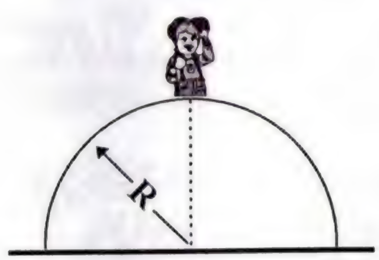
a) La rapidez de Vo con la que pasó por el punto A.
b) La distancia que recorre el bloque, hasta llega al punto más alto del plano.

c) El trabajo realizado por la fuerza de fricción.
d) La energía mecánica total en la parte más alta del plano.
e) Luego de detenerse en la parte alta del plano, descenderá o no el bloque ¿Por qué?
f) En caso de descender, con qué rapidez pasará de regreso por el punto A.

10.- Un bloque de masa 1 Kg es disparado hacia arriba de un plano inclinado. El coeficiente de fricción único es 0,5. Si las condiciones energéticas del bloque son: en la base del plano, energía cinética = 100 J; energía potencial gravitatoria = 50 J. En la parte más alta es: energía cinética = 0 J, energía potencial gravitatoria= 90 J. De esta información determinar:
a) Si el bloque desciende o no por el plano. ¿Por qué?
b) El valor de la fuerza de fricción bajo la condición anterior.
c) Si se lúbrica el plano inclinado y la fuerza de fricción se reduce a 1/10 de su valor, bajo las mismas condiciones energéticas, llegará el bloque a la parte más alta del plano con alguna rapidez? ¿En caso afirmativo, cuál es ese valor?

11.- Dos partículas A y B de masas "m" y "15m" respectivamente se mueven por una superficie horizontal lisa siguiendo trayectorias rectilíneas. La energía mecánica total es la misma para las dos partículas.
a) ¿Cuál es el trabajo que debe realizarse sobre cada una de ellas para detenerlas, en función de "m" y V_A.
b) Si se aplica una misma fuerza F sobre cada una de las partículas, en dirección contraria a su movimiento.¿Qué distancia, desde ese instante, recorre cada una hasta detenerse en función de "m", F y V^A?

12.- Un muchacho esta en reposo en la parte superior de un montículo de hielo semi-esférico de Radio R (ver figura). Si el muchacho comienza a resbalar y el hielo se supone sin rozamiento. Determinar:



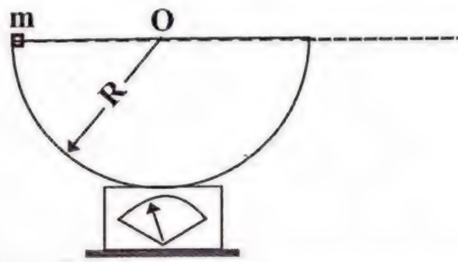
O

a) La posición del punto donde el muchacho se separa del hielo en función de R.
b) La posición donde cae el muchacho en el suelo, respecto al centro de la semi-esfera.

13.- Se deja caer un bloque de hielo desde la parte superior de un recipiente de forma de media esfera de radio 20 cm. Si la masa del hielo es de 30gr., determinar:

a) El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento, si la velocidad del bloque en el punto más bajo es 100 cm/s.

b) Si se practica un corte en el fondo del recipiente y se coloca una balanza como se indica en la figura. ¿Cuánto marcará la balanza, en el instante que el bloque pasa por este punto?.

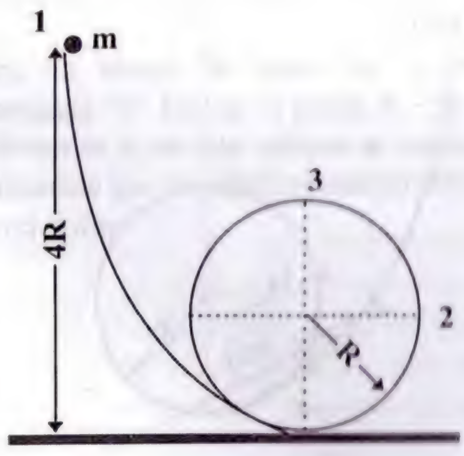


14.- Se deja caer un bloque de masa "m" desde el punto 1 de la pista sin rozamiento, como se indica en la figura. Determinar:

a) La magnitud y dirección, respecto a la horizontal, de la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo en el punto 2.

b) La velocidad del cuerpo en el punto 3.

c) La magnitud de la fuerza que ejerce el bloque sobre la pista en 3.

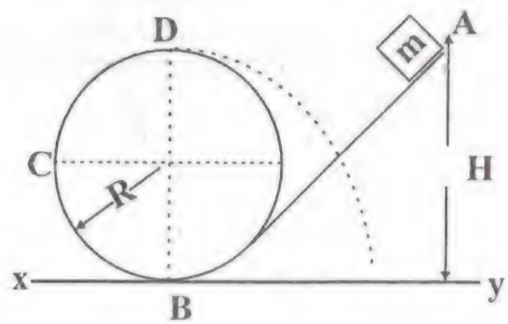


15.- Un ciclista y su bicicleta pesan 800 N y se mueven en una pista circular vertical de 2,5 m de radio. Si la rapidez en el punto más bajo de la trayectoria circular es de 15 m/s. Despreciando el rozamiento de la pista. Calcular:

a) La aceleración en el punto más alto de la trayectoria.

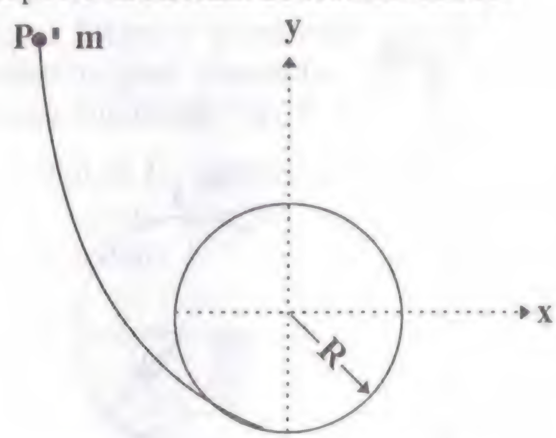
b) La magnitud y dirección de la fuerza que hace la pista sobre la bicicleta en el punto más alto.

16. Un cuerpo de masa "m" comienza a resbalar desde el punto A de la pista sin rozamiento, si el radio de la pista circular es 1 m. Determinar:
a) La mínima altura H, desde donde se debe soltar al cuerpo para que no se separe de la pista en ningún punto.
B) Suponiendo que la pista estuviera cortada en el punto D, a qué distancia del punto de tangencia B impactaría el cuerpo en el plano horizontal?



17.- Un cuerpo de masa "m" se encuentra atado en el extremo de una cuerda de longitud "L" y girando en un plano vertical. Demostrar que la tensión de la cuerda en el punto más bajo de la trayectoria excede a la tensión de la cuerda en el punto más alto de la trayectoria en 6 veces el peso del cuerpo que gira.

18.- En la figura determinar respecto al sistema de referencia XY.

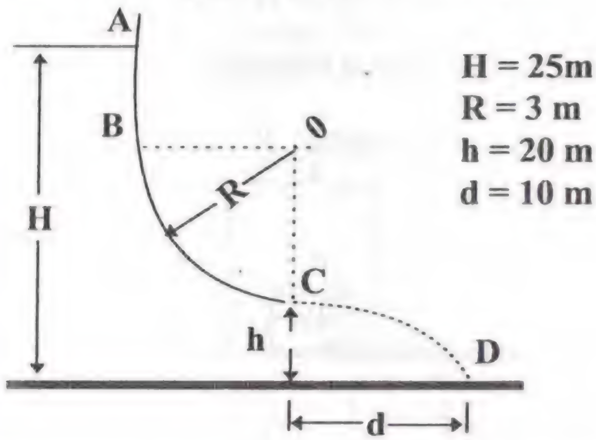


a) En qué posición se encuentra la partícula que resbala por el rizo, cuando sobre ella actúa un fuerza resultante $\vec{F}$.

$\vec{F} = 5mg\vec{i} - 4mg\,\vec{j}$

b) La coordenada en Y del punto P, desde el cual se deja caer la partícula con velocidad $=0\vec{i} - 0\vec{j}$ m/s para que cumpla la condición del literal anterior.

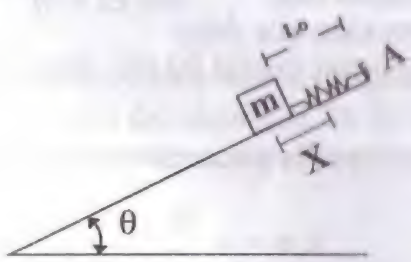
19.-En la pista de la figura (A - B - C) existe rozamiento sólo en el tramo BC, si se suelta en A un cuerpo de masa 2 Kg y este luego de deslizar sobre la pista (A - B - C) hace impacto en el piso en el punto D, determinar el trabajo de la fuerza de rozamiento en el tramo B-C de la pista.



20.-Un resorte de longitud "Lo" necesita de una fuerza de 250 N para estirarle una distancia de 8 cm. ¿Qué trabajo en J es necesario realizar, para estirarlo una distancia adicional de 2,5 cm? Resuélvalo analítica y gráficamente.

21.-Se suelta un cuerpo desde una altura de 2 m, sobre un resorte ideal vertical de constante elástica 40 N/cm, si el resorte se comprime 20 cm, determine el peso del cuerpo.

22.-En el sistema de la figura, un bloque de masa "m" se encuentra unido a un resorte ideal de longitud "Lo" y constante "k" fijo en el punto A. Se empuja el cuerpo hacia arriba deformándol al resorte una distancia X, en este instante se suelta el sistema. Demostrar, que en ausencia de rozamiento, la distancia que recorrerá el cuerpo sobre el plano inclinado está dada por la siguiente relación:



$$d = \frac{2mg\,sen\,\theta}{k} + 2X$$

23.- En el sistema de la figura, determinar:

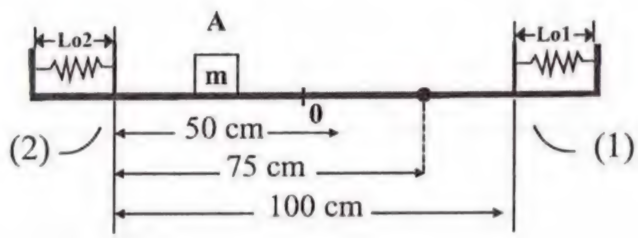
a) La distancia X_1 que se debe comprimir al resorte (1) parta que un cuerpo de masa 5 Kg se detenga en el punto A; luego de atravesar la pista, comprimir al resorte (2) y regresar.

b) La energía mecánica perdida por el rozamiento en todo el recorrido

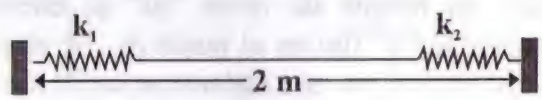
c) La velocidad del cuerpo en 0, al regreso

d) El trabajo realizado por la normal durante todo el recorrido.

$k_1 = 1500$ N/m
$k_2 = 2000$ N/m
u = 0,3



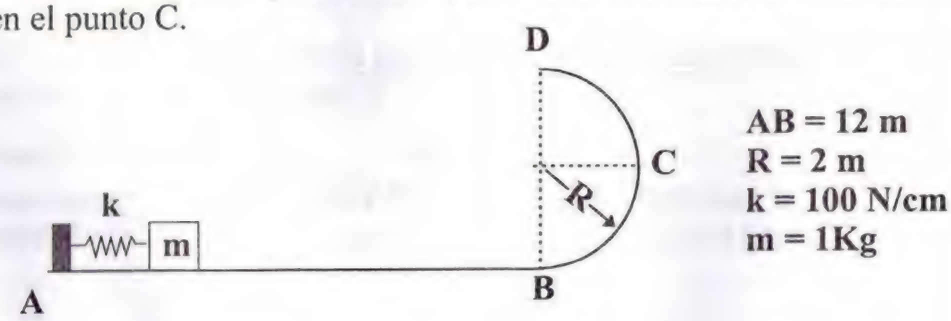
24.- El resorte l tiene una longitud de 50 cm y constante elástica de $k_1 = 25$ N/m, el resorte 2 tiene 1 m de longitud y una constante $k_2 = 10$ N/m. Están unidos y estirados de tal manera que sus extremos fijos están separados 2 m. Calcule la longitud de cada uno de los resortes en esta posición.



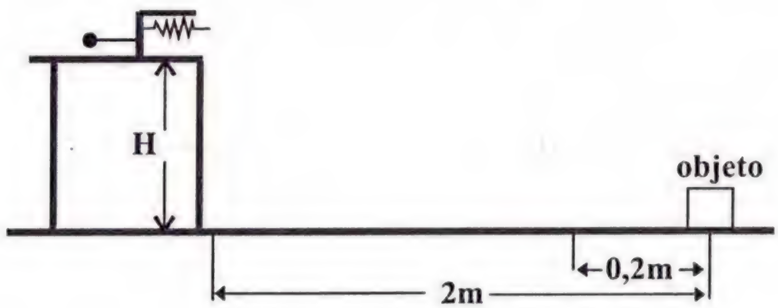
25.- La pista de la figura es totalmente lisa.

a) Calcular la mínima comprensión que debe hacerse sobre el resorte de longitud inicial 50 cm, para que el cuerpo de masa "m" complete la trayectoria.

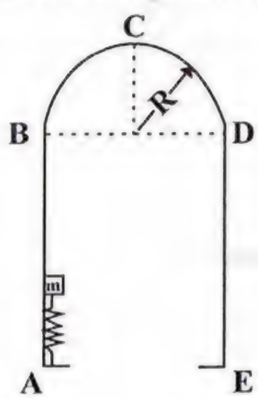
b) Determine la reacción que ejerce la pista sobre el cuerpo, cuando éste se halla en el punto C.



26.- Dos muchachos desean impactar a un objeto que está situado en el piso, usando un pistola de resorte colocada horizontalmente sobre una mesa de altura H. Se considera despreciable el rozamient en el cañon de la pistola. El primer muchacho comprime el resorte 1 cm y e proyectil impacta en el piso 20 cm delante del objeto; el mismo que está situado 200 cm del pie de la mesa. Calcular la distancia que debe comprimir el resorte el segundo muchacho con el propósito de que el proyectil pegue en el blanco.

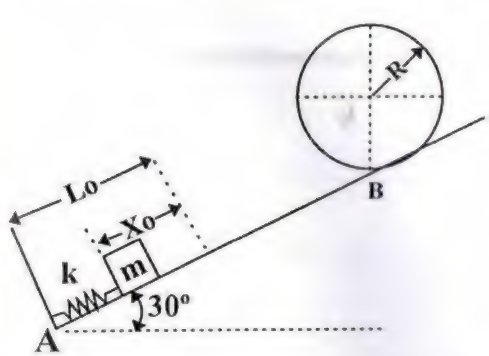


27.- En la base (A) del arco vertical de la figura, se coloca un resorte de longitud natural 1 cm. Se comprime el resorte una distancia de 5 cm y se coloca sobre él un bloque de 1 Kg. Si se desea que el bloque de la vuelta al arco ABCDE con el mínimo esfuerzo, determine el valor de la constante de resorte en Dinas/cm.



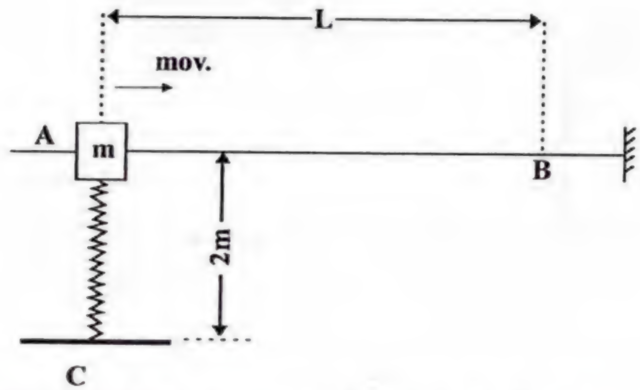
AB = 100 cm
R = 25 cm

28.- Si en la figura la sección recta (tramo AB), es rugosa y la circular lisa; determinar la mínima comprensión necesaria del resorte, a fin de que una partícula de 1 Kg disparad por el resorte comprimido complete una vuelta en la sección circular.

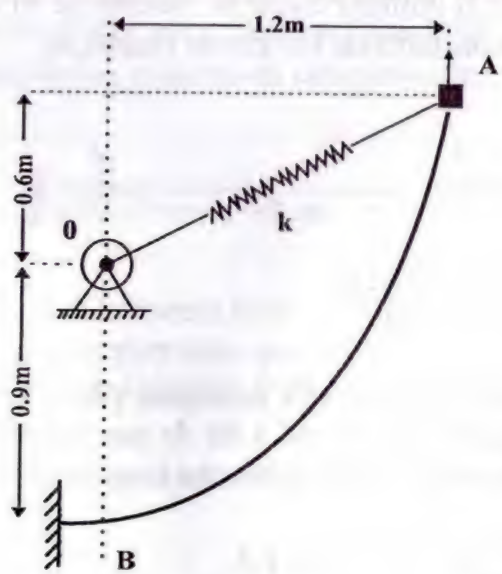


u = 0,2
Lo = 0.5m
$\overline{AB}$ = 4m
R = 2m
k = 4000 N/m
X_0 = mínima comprensión

29.- Un cursor de 2 Kg está montado sobre una barra lisa y unido a un punto C mediante un resorte de k = 200 N/m y 2 m de longitud natural. Un impulso le comu al cursor una rapidez de 5 m/s desplazandolo sobre la barra sin rozam hasta el punto B donde se detiene. Determinar la longitud que recorre el cursor.



30.- Un cursor de masa 50 Kg se mueve a lo largo de la guía rígida y lisa desde A hacia B, como se indica en la figura. Calcular su rapidez en B si parte del reposo en A. La longitud normal del resorte es 0,6 m y su constante es de 1000 N/m.



MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

1.- Una partícula de masa 10 g realiza un movimiento armónico simple horizontal de acuerdo con la siguiente ecuación: $x = 4\cos(2\pi t + \phi)$ cm. Determinar:

a.- La velocidad máxima.
b.- La aceleración máxima
c.- La constante elástica del sistema.

a.- $x = 4 \cos(2\pi t + \phi)$ cm

$w = 2\pi$ rad/s ; $V = w\sqrt{A^2 - x^2}$ $V_{max} = wA$

$V_{max} = 2\pi$ rad/s .4 cm = 8πcm/s

b.- $a_{max} = -w^2 . A = -4\pi^2 \text{rad/s}^2 . 4 \text{ cm} = -16\pi^2 \text{cm/s}^2$

c.- $k = w^2.m = (2\pi)^2 \text{rad}^2/\text{s}^2 \; 10 \text{ g} = 40\pi^2 \text{ g/s}^2$

2.- Demuestre que en el MAS Horizontal, la relación entre la energía cinética y la energía potencial elástica es:

$$Ec/Ep_e = (A/x)^2 - 1$$

$$Ec/Ep_e = ½\, m V^2 / ½\, k x^2 = m(w\sqrt{A^2 - x^2})^2 / k\, x^2$$

$$= m w^2 (A^2 - x^2) k x^2$$

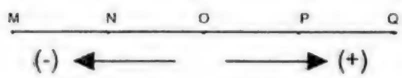
$$k = m w^2 ; A^2 - x^2 / x^2$$

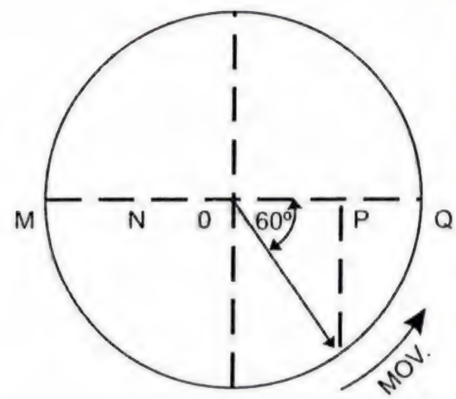
$$Ec/Ep_e = (A/x)^2 - 1 \qquad \text{L.Q.Q.D.}$$

3.- Una partícula de masa 10 g ejecuta MAS sobre la línea horizontal MNOPQ cuyos puntos son equidistantes (situados a igual distancia). Determinar:

a.- El signo de la fuerza recuperadora en P, cuando la partícula se dirige hacia O.
b.- El período del MAS, si la partícula se demora en ir desde P hasta O, pasando por Q, un tiempo de 6 segundos.

c.- La constante elástica del movimiento.





m = 10 g

a.- Frec = (-)

b.- 150º→ 6 s; 6s / 150º = τ = 14.5 s

c.- $\tau = 2\pi\sqrt{m/k} \rightarrow k = 4\pi^2 . m/\tau^2 = 4\pi^2 . 10\ g/(14.5)^2\ s^2$

$k = 0.19\,\pi^2\ g/s^2$

4.- Si una partícula de masa 0.5 Kg oscila con MAS que tiene una frecuencia de 2 ciclos/s sob una línea horizontal ABCDE como muestra la figura. El punto C coincide con origen del sistema de coordenadas y se conoce que a t = 0 s la partícula se encuentra en B dirigiéndose a C. Determine:

a.- La posición de la partícula (en términos de los unitarios normalizados) al tiempo t = 2.25 s.

b.- El espacio recorrido por la partícula desde t = 0 s hasta t = 2.25 s.

c.- La velocidad media de la partícula (en términos de los unitarios normalizados), para el intervalo t = 0 s a t = 2.25 s.

a.- $w = 2\pi f = 2\pi (1.5)$ rad/s $= 3\pi$ rad/s

$\phi = (4/3)\ \pi$ rad

$A = 20$ cm

$X = A \cos(wt + \phi) = 20 \cos(2\ \pi t + 4\pi/3)$ cm

Para $t = 2.25$ s, $X = 17.32$ cm

$\vec{r} = 17.32\,\vec{i}$ cm

b.- En 2 s recorrerá 2 ciclos (80 cm c/ciclo), en los 2.25 s recorrerá 27.32 cm , entonces:

$\Delta S = e = 2\ (80) + 27.32$ cm $= 187.32$ cm

c.- $\vec{V}m = (\vec{r}_F - \vec{r}_o)/\Delta t$; $\vec{r} = 17.32\,\vec{i}$ cm

$\vec{r}_o = -10\,\vec{i}$ cm

$\Delta t = 2.25$ s

$\vec{V}m = 12.14\vec{i}$ cm/s

5.- Una partícula vibra con MAS horizontal de amplitud 10 cm de acuerdo con la siguiente ecuación: $a_{M.A.S.} = -(10\pi\ )^2 .\ x$ cm/s.^{2} En el instante t = 0 s, la partícula pasa por la posición de equilibrio y se dirige hacia la derecha. Determine:

a.- El tiempo mínimo que se demora en alcanzar la aceleración máxima.
b.- Las ecuaciones generales del movimiento. Es decir: $x = f(t)$; $v = f(t)$ y

$a = f(t)$

a.- $A = 10$ cm

$a = -(10\pi)^2 . x \text{ cm/ s}^2$; $w = 10\pi$ rad/s

$2\pi \text{ rad} = 10\pi \text{ rad/s} . \tau \rightarrow \tau = 0.2$ s

$\Delta t = (1/4)\tau = (1/4)(1/5)$ s $= 1/20$ s

$\Delta t = (1/20)$ s

b.- $x = A \cos(wt + \phi) = 10 \cos(10\pi t + 3\pi/2)$ cm

$V = -A w \operatorname{sen}(wt + \phi)$

$V = -10(10\pi) \operatorname{sen}(10\pi t + 3\pi/2)$ cm/s

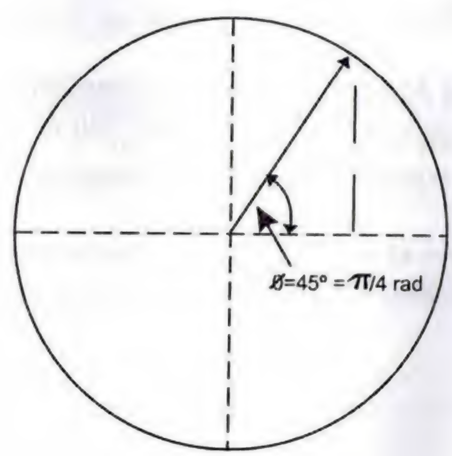
$V = -100 \operatorname{sen}(10\pi t + 3\pi/2)$ cm/s

$a = -A w^2 \cos(wt + \phi)$

$a = -10(10\pi)^2 \cos(10\pi t + 3\pi/2)$ cm/s^2

$a = -1000\pi^2 \cos(10\pi t + 3\pi/2)$ cm/s^2

5.- La elongación del M.A.S. de una partícula está dada por la siguiente ecuación, donde t está en segundos. $X = 5 \cos(3\pi t + \pi/4)$ cm. Determine el tiempo mínimo que se demora la partícula en alcanzar su velocidad máxima a partir del instante t = 0 s.



$w = 3\,\pi$ rad/s

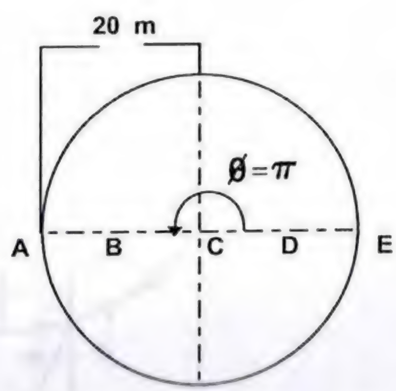
$\phi = 2\,\pi$ rad

$\Delta t = \phi/w = 2\,\pi\text{rad} / 3\,\pi\text{rad/s} = 2/3$ s

$\Delta t = ((2/3 \text{ s}) / 2\pi \text{ rad})\pi /4 \text{ rad} = 1/12\text{s}$

$\Delta t = 1/12$ s

7.- Un cuerpo vibra con MAS horizontal con un período de π segundos entre los puntos equidistantes A, B, C, D y E que distan entre sí 0.10 m. Para t = 0 s el cuerpo se encuentra en el punto A. Determine las ecuaciones generales del movimiento: X = f (t); v = f (t) y a = f (t)



$\tau = \pi$ s; $\quad w = 2\,\pi/\tau = 2$ rad/s

A = 20 cm

$X = A\cos(\,w\,t + \phi) = 20\cos(\,2\,t + \pi)$ cm

$V = -\,A\,w\,\text{sen}(\,w\,t + \phi) = -\,40\,\text{sen}(\,2\,t + \pi)$ cm/s

$a = -\,A\,w^2\cos(\,w\,t + \phi) = -\,80\cos(\,2\,t + \pi)$ cm/s^2

8.- Un cuerpo vibra con MAS sobre la línea horizontal POQ de longitud 0.20 m con una frecuencia de 5 ciclos/s. A un tiempo t = 0 s se ve a la partícula en el punto medio entre O y Q dirigiéndose hacia O. Determinar:

a.- Las ecuaciones generales del movimiento : X = f(t); v = f(t) y a = f(t).

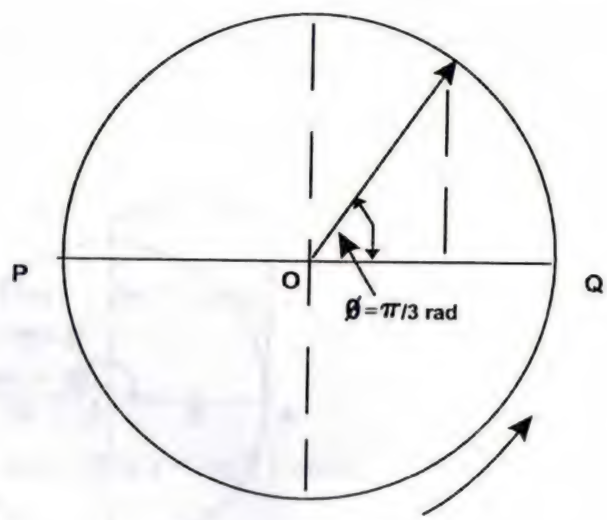
b.- la velocidad y la aceleración en el instante $t = 0$ s.
c.- la constante de oscilación del sistema, si la masa de partícula es 2 kg

a.- $w = 2\pi f = 2\pi$ rad/ciclo .5 ciclo/s = 10π rad/s

$x = A \cos(w t + \phi) = 0.1 \cos(10\pi t + \pi/3)$ m

$V = -A w \operatorname{sen}(w t + \phi) = -\pi \operatorname{sen}(10\pi t + \pi/3)$ m/s

$a = -A w^2 \cos(w t + \phi) = -10\pi^2 \cos(10\pi t + \pi/3)$ m/s^2



b.- $V = -\pi \operatorname{sen}(10\pi t + \pi/3)$ m/s Si $t = 0$ s

$V = -\pi \operatorname{sen}(\pi/3) = -\pi\sqrt{3}/2$ m/s

$A = -10\pi^2 \cos(\pi/3) = -5\pi^2$ m/s^2

c.- $k = m \cdot w^2 = 2$ kg $(10\pi)^2$ rad^2/s^2 = 200π kg/s^2

9.- Dos partículas A y B se mueven con MAS sobre la línea horizontal PQRST de 20 cm de longitud, en la que los puntos indicados equidistan entre si. El período del movimiento para las dos partículas vale 1,5 segundos e inician su movimiento en forma simultánea en los extremos de la recta; A inicia en P y B en el punto T. Determinar:

a.- el valor de la fuerza recuperadora que actúa sobre cada partícula cuando se cruzan por primera vez.

b.- La velocidad de la partícula, en función de i, j, en ese instante.

c.- la distancia que separa a las dos partículas 0.5 s después de haber empezado su movimiento.

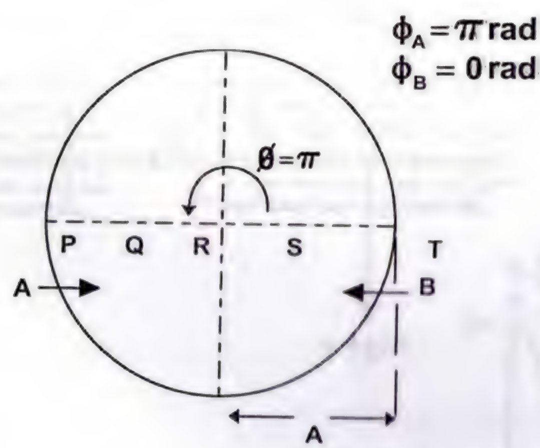
a.- $t_1 = t_2 = 1.5$ s

$F_{R(A)} = F_{R(B)} = 0$ N

b.- $V = 2\pi\sqrt{A^2 - X^2}/\tau = 2\pi A/\tau = (2\pi)\ 10\ cm / 1.5\ s = 13.3\pi\ cm/s$

$\vec{V}_B = -13.3\pi\vec{i}$ cm/s

$\vec{V}_A = 13.3\pi\vec{i}$ cm/s



c.- $w = 2\pi/\tau = 2\pi$ rad/1.5 s $= 1.33\pi$ rad/s

$x = A\cos(w\ t + \phi)$ Si t = 5 s

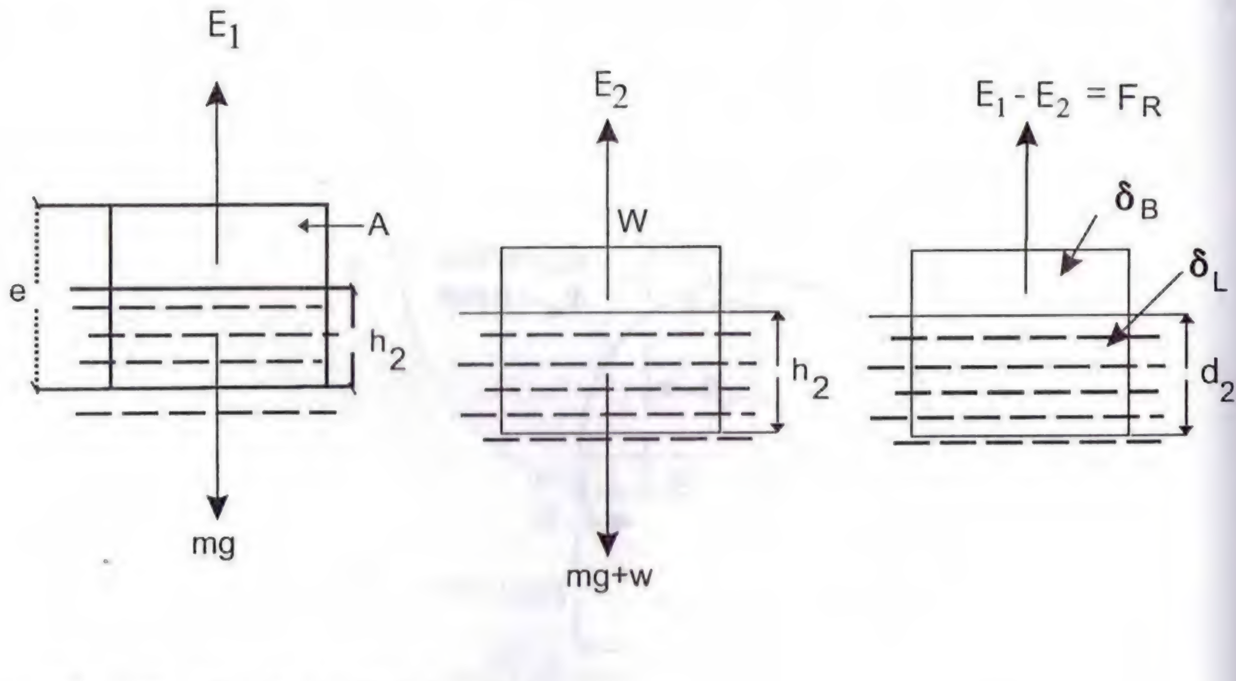
$x_A = 10\cos(1.33\pi\ rad/s\ .\ 5\ s + \pi)\ cm = 10\cos(7.660\pi)\ cm = 5\ cm$

$x_B = 10\cos(1.33\pi\ rad/s\ .\ 5\ s + 0)\ cm = 10\cos(6.667\pi)\ cm = -5\ cm$

distancia de separación = 10 cm

10.- Una piedra está sobre una balsa rectangular de densidad 0.13 y espesor 0.10 m, que se encuentra flotando sobre agua (densidad = 1.2). Al retirar la piedra la balsa queda oscilando con MAS .- Determine la frecuencia de oscilación de la balsa.

δ_L = densidad del líquido
δ_B = densidad de la balsa
e = espesor de la balsa



$F_R = E_2 - E_1 = k \cdot x = k\,(h_2 - h_1)$

$\delta_2 \cdot g\,(A\,h_2) - \delta_1 (A\,h_1) = k\,(h_2 - h_1) \rightarrow k = A \cdot \delta_1 \cdot G$

$f = ½\pi \sqrt{k/m} = (½\pi)\sqrt{A.\,\delta_L \cdot g / \delta_2 \cdot A}$ $\quad \delta_1 = \delta_L \quad \delta_2 = \delta_S$

$f = (½\,\pi) \sqrt{1.2 x 10\ m/s / 0.13 \cdot 0.1\ m} = 4.42$ ciclos/s

11.- En un líquido de densidad δ_L flota una balsa de espesor uniforme 10 cm. La balsa es sumergida y luego dejada libre, en este instante la fuerza neta que actúa sobre la balsa en forma vertical hacia arriba es el 25% del peso de la

balsa. La balsa comienza a vibrar con MAS y su densidad es $\delta_2 = (3/4)\ \delta_B$ calcule la amplitud del movimiento resultante.

$m \cdot w^2 = k$; $k = m(2\pi f)^2$, pero $f = (½\pi)\sqrt{\delta_L\ g/\delta_B \cdot e}$ e = espesor

(ver problema 10)

$k = m4\pi^2 \cdot ¼\ \pi^2\delta_L \cdot g/\delta_B e = m \cdot \ \delta_B g/\ \delta_2\ e$

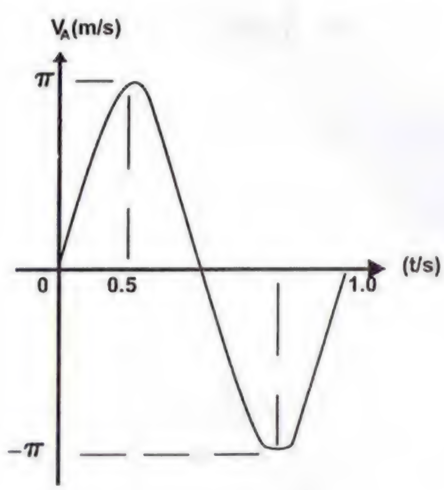
Frec = k . Am = m g/4

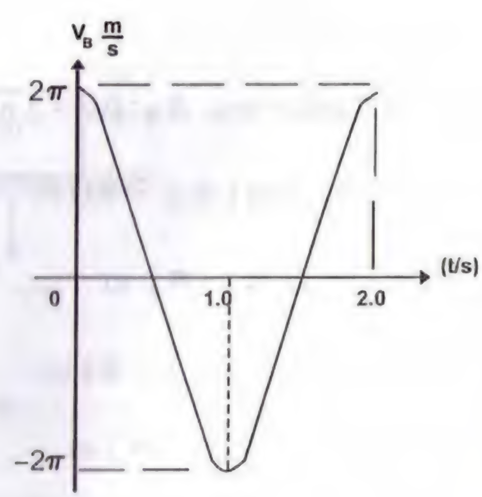
$A = m_B\, g/4k = m_B \cdot (g/m_B) \cdot 4\delta_1 \cdot (g/\delta_B) \cdot e$

$\delta_B \cdot e/4\delta_L = (3/4)\delta_L \cdot e/4\delta_L = 3/16 \cdot e$

A = 1.88 cm

12.- Dos sombras A y B, parten simultáneamente y oscilan armónicamente sobre líneas horizontales de acuerdo a los gráficos V vs t, indicados a continuación. Los puntos de equilibrio para las dos sombras coinciden.





Determine:

a.- el gráfico a vs. t para la partícula A.
b.- el vector posición de A respecto a B, para t = 3 s.

Para (A)

$\phi_A = \pi$ rad

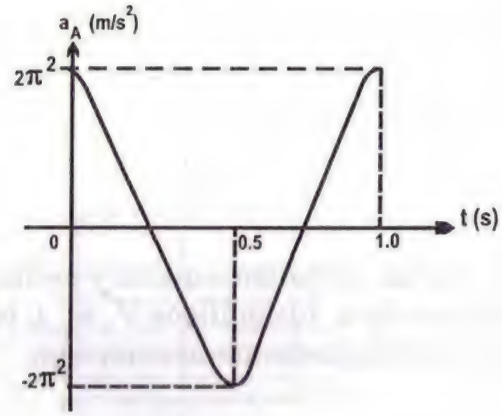
$\tau_A = 1$ s; $w_A = 2\pi / \tau_A = \pi$ rad/s

$V_{máx\,A} = \pi$ m/s $= w_A \cdot A_A$; $A_A = 0.5$ m

Para (B)

$\phi_B = (3/2)\,\pi$ rad

$\tau_B = 2$ s ; $w_B = 2\pi / \tau_B = \pi$ rad/s



$V_{máx\,B} = 2\pi$ m/s $= w_B \cdot A_B$; $A_B = 2$ m

$a_A = -\,w_A^2 \cdot A_A \cdot \cos(w_A t + \phi_A)$ m

$a_A = -2\pi^2 \cos(2\pi t + \pi)$ m

b.- $X_A = A_A \cdot \cos(w_A\, t + \phi_A)$ m

$X_A = 0.5 \cos(2\pi t + \pi)$ m Cuando $t = 3$ s

$X_A = -\,0.5$ m

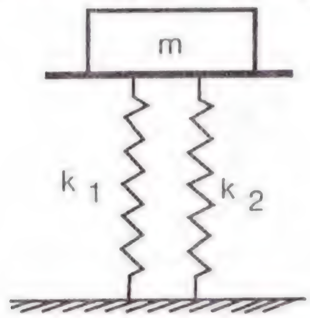
$X_B = A_B \cdot \cos(w_B\, t + \phi_B)$ m

$X_B = 2 \cdot \cos(\pi\, t + (3/2)\,\pi)$ m Cuando $t = 3$ s

$X_B = 0$ m

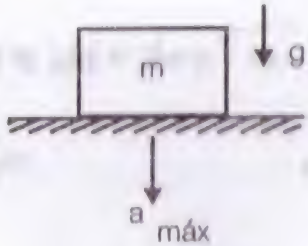
$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = -0.5\,\vec{i} - 0\,\vec{i} = -0.5\,\vec{i}$ m

13.- Un bloque de 5 Kg se coloca sobre una plataforma de masa despreciable que está situada sobre muelles o resortes, la plataforma desciende 2 cm. Todo el sistema se pone en movimiento bajando la plataforma y soltándola a continuación. Determine el valor máximo que puede alcanzar la amplitud del movimiento sin que el bloque de masa indicada se separe de la superficie de la plataforma en ningún instante. Se conoce además que: $k_1 = 2k_2$



$k_T = k_1 + k_2 = 2\,k_2 + k_2 = 3\,k_2$

$F_R = k_T \cdot x$; $m\,g = (3\,k_2)\,.\,x$



$k_2 = (\,5\text{ Kg x }10\text{m/s}^2) / (3 \text{ x } 0.02\text{ m}) = 833.3$ N/m

$a_{máx} = -\,w^2 A$; $k = m\,.\,w^2$

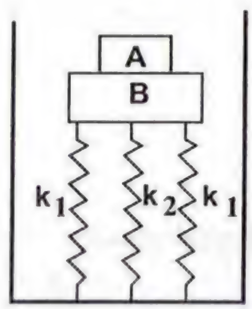
$(\,k / m\,)\,.\,A \leq g$

$A \leq (g\,m) / (\,k_T) = (\,10\text{ m/s}^2.\ 5\text{ kg}\ .\ s^2\,) / (\,3 \text{ x } 833.3\text{ kg m}\,)$

$A \leq 0.02$ m

14.- Dos bloques A y B están colocados sobre el sistema de resortes de la figura, en el cual $k_1 = 2k_2$. En estas condiciones el período de oscilación del sistema es 0.8 segundos. Si se retira el bloque A, la frecuencia de oscilación aumenta hasta 2.5 ciclos/s. Determinar:

a.- la masa de B, si la de A es 2kg.
b.- las constantes k_1 y k_2



a.- $k_T = k_1 + k_2 + k_1 = 2\ k_2 + k_2 + 2\ k_2 = 5\ k_2$

$$\tau = 2\pi \sqrt{m_T / k_T}$$

$$k_T = 4\ \pi^2\ m_T / \tau^2 = 4\ \ ^2\ (m_A + m_B)/\ (0.8)^2 = 4\ \pi^2\ \ m_B / (0.4)^2$$

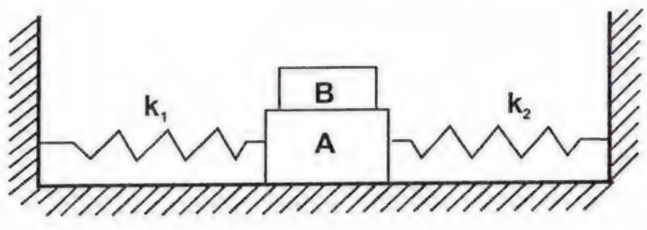
$m_A + m_B = 4\ m_B$ $\qquad\qquad$ $m_B = m_A / 3$

$m_B = 2/3$ kg

b.- $k_T = 4\pi^2\ (2\text{ kg}) / (0.4)^2\ 3\ s^2 = 5\ k_2$

$k_2 = 32.9$ N/m $\quad k_1 = 65.8$ N/m

15.- En el sistema de la figura los bloques A y B ejecutan MAS horizontal.



a.- Demuestre que la constante del movimiento es: $k_1 + k_2$.
b.- Si la frecuencia de oscilación es ($1/\pi$) ciclos/s. ¿Cuál es el período de oscilación del sistema, si se quita la masa del bloque B?

$m_A = 3m$
$m_B = m$

$F_T = F_1 + F_2$

$k_T . x_T = k_1 . x_1 + k_2 . x_2$; puesto que $x_T = x_1 = x_2$

$k_T = k_1 + k_2$

$f_1 = 1/\pi$ ciclos/s$= (½ \pi) \sqrt{m_T / k_T}$

$f_2 = (½ \pi) \sqrt{m_A / k_T}$

$F_1 / f_2 = \sqrt{(m_T / k_T) / (m_A / k_T)} = (1/\pi) / f_2 = \sqrt{m_T / m_A}$

$f_2 = 1/\pi \sqrt{4/3} = 2 / \pi \sqrt{3}$ ciclos / s

$\tau_2 = (\pi \sqrt{3}) / 2$ s

16.- Se tiene un cuerpo de 1kg sujeto a un resorte (k = 100 N/m) en posición vertical. En la posición de equilibrio del sistema masa - resorte, se le comunica a la masa una velocidad inicial de 1 m/s verticalmente hacia abajo y el sistema oscila con MAS. Determine.

a.- el período de las oscilaciones.
b.- la amplitud del movimiento.

a $\tau = 2\pi\sqrt{m/k}$; $m = 1kg$; $k = 100$ N/m

$\tau = 0.2$ s

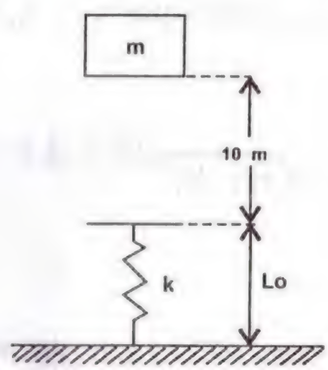
b.- $V_{máx} = w \cdot A$

$A = V_{máx}/ w$; $V_{máx} = 1$ m/s

$w = \sqrt{k/m} = 10$ rad/s

$A = 0.1$ m ; $A = 10$ cm

17.- Se deja caer un cuerpo de 50 kg desde una altura de 10 m (como se indica en la figura) sobre un resorte de constante k = 2000 N/m. Determine.
a.- La distancia máxima que se comprime el resorte.
b.- La posición de equilibrio, la amplitud y el período del MAS.
c.- La velocidad máxima del MAS.



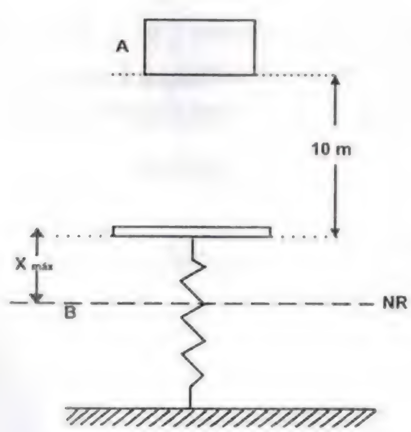
a.- $E_{MA} = E_{MB}$

$E_{pA} = E_{peB}$

$m\,g\,h_A = ½\,kx_B^2$; $x_B = x_{máx}$

$2x^2 - x - 10 = 0$ $h_A = (10 + x_{máx})$

$x_{máx} = 2.5$ m



b.- $P_{eq} : F_D = 0$

$F_R = m\,g$

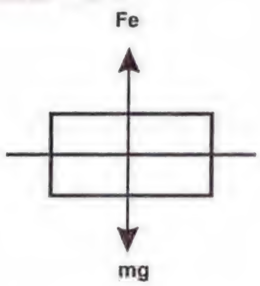
$k \,.\, x_c = m\,g$

$x_c = x_{Eq} = m\,g / k$

$x_c = 0.25$ m

$A = x_B - x_c = 2.25$ m

$\tau = 2\,\pi\,\sqrt{m/k} = 1$ s

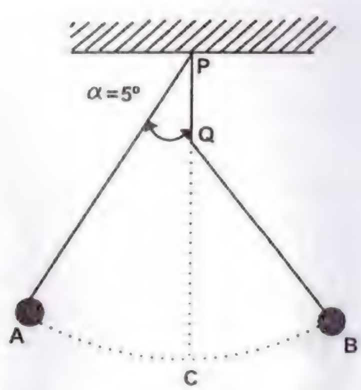


c.- $V_{máx} = w \,.\, A$; $w = 2\,\pi / \tau$

$V_{máx} = 2\,\pi\,A / \tau$

$V_{máx} = 14.23$ m/s

18.- Una esfera de 1 kg está sujeta a una cuerda de longitud 1 m. Inicialmente se encuentra en reposo en el punto A desde el cual se suelta y comienza a oscilar. En Q existe una varilla perpendicular al plano del movimiento de modo que PQ = 0.2 m. Determinar el tiempo que demora la esfera en ir de A hacia B.



$\tau = 2\pi\sqrt{L/g}$

$t_{A-B} = t_{A-C} + t_{C-B}$

$t_{A-C} = (2\pi/4)\sqrt{L_{pA}/\ g} = (2\ \pi/4)\sqrt{1\ m/\ 10m/s^2} = 0.5$ s

$t_{C-B} = (2\pi/4)\sqrt{L_{Q-B}/g}$

$t_{C-B} = (2\pi/4)\sqrt{0.8\ m/\ 10m/s^2} = 0.44$ s

$t_{A-B} = 0.94$ s

19.- Un péndulo simple de 1.2 m de longitud tiene sujeto, en su extremo libre, una partícula de 250 gr. El péndulo se desplaza describiendo un ángulo de 8º y se lo suelta, determine:

a.- La fuerza resultante que actúa sobre la partícula en la posición de máximo desplazamiento.
b.- La velocidad máxima
c.- Su aceleración máxima

sen 8º = A/L

A = L sen 8º = 1.2 m (sen 8º)

a.- $\Sigma F = ma$

$\Sigma F = mw^2A$

$w = 2\pi/\tau$

$\Sigma F = m(2\pi/\tau)^2 A$

$\tau = 2\pi\sqrt{L/g}$

$\tau = 2\pi\sqrt{1.2/9.8}$

$\tau = 2.2$ s

$\Sigma F = 0.25(2\pi/2.2).\ \ 1.2$ sen 8º (N)

$\Sigma F = 0.17\ N$

b.- $v_{máx} = w\ A = (2\pi/\tau)\ A = (2\pi/2.2)\ 1.2\ \text{sen}\ 8^o$

$v_{máx} = 0.48\ m/s$

c.- $a_{máx} = -\ w^2\ A$

$a_{máx} = -\ (2\pi/\tau)^2\ A$

$a_{máx} = -\ 1.36\ m/s^2$

20.- Un objeto de 20 Kg está suspendido de una cuerda y oscila con un período de 0.5 s y una amplitud de 3 cm, ¿cuánta energía fue transferida inicialmente al objeto ?

$m = 20\ kg$

$\tau = 0.5\ s$

$A = 3\ cm$

$E_o = ?$

$E_o = ½\ k\ A^2$

$\tau = 2\pi\sqrt{m/k}$

$\tau^2 = (2\pi)^2\ (m/k)$

$k = 40\pi^2\ /\tau^2 = 1579.14\ N/m$

$E_o = ½\ k\ A^2 = 1/2\ (1579.14)(3x10^{-2})^2$

$E_o = 0.71\ J$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Un cuerpo se encuentra sobre una plataforma que vibra horizontalmente con MAS de amplitud 20 cm y de frecuencia $2.5/\pi$ ciclos/s. Determinar:

a.- el valor mínimo del coeficiente de rozamiento para que el cuerpo no resbale sobre la plataforma.

b.- la ecuación del movimiento $x= f(t)$. Si a $t = 0$ s el cuerpo se encuentra en la posición de equilibrio y moviéndose hacia la derecha.

2.- Una partícula vibra con MAS sobre una línea horizontal de 30 cm de longitud. Cuando se encuentra a 5 cm de su posición de equilibrio su aceleración es de $500\ cm/s^2$.

a.- determine el valor de la velocidad en ese punto.

b.- la rapidez máxima que tiene la partícula.

3.- Una partícula oscila con MAS sobre una línea horizontal ABCDE de longitud 40 cm en la cual los puntos A, B, C, D y E están situados a igual distancia. La partícula de 10 g se demora (1/60) segundos en ir de B a C. Determine:

a.- la frecuencia de oscilación del movimiento.

b.- la energía cinética en el punto D.

c.- la energía potencial elástica en el punto D.

d.- la energía mecánica total en el punto B.

4.- Cuánto tiempo transcurrirá desde que comienza el movimiento, hasta que la partícula provista de MAS de acuerdo a la relación: $x = 7 \cos(0.5\pi t)$ cm, recorra el espacio existente entre la posición de equilibrio y la elongación máxima.

5.- Una partícula de 10^{-5} kg oscila sobre el eje de las x con MAS. En el instante $t = 0$ s se observa a la partícula pasando por el punto $x = -2$ cm y alejándose del origen; se conoce además que la amplitud del movimiento es 5 cm y la frecuencia de oscilación 10^3 ciclos/s. Determine:

a.- la ecuación del movimiento $x = f(t)$

b.- la fuerza que actúa sobre el cuerpo cuando pasa por la posición $x = 3$ cm.

c.- la constante elástica del movimiento.

6.- Una partícula oscila con MAS, sobre una línea horizontal de 20 cm de longitud, entre los puntos equidistantes A, B, C, D y E. Se conoce que el tiempo que emplea la partícula desde el punto D hasta el C pasando por A es 7 segundos. Determine:

a.- el período del movimiento.
b.- la ecuación de la velocidad en función del tiempo, si para $t = 0$ s, la partícula se encuentra en el punto B y dirigiéndose hacia C.
c.- el tiempo que se demora la partícula en ir desde $x = -4$ cm hasta la posición $x = 5$ cm.

7.- Determine el período del movimiento de una partícula que vibra con MAS y que tiene una aceleración de $0.5\ m/s^2$ cuando su elongación es de 10 cm.

8.- Una partícula de masa 2×10^{3} kg oscila con MAS sobre la línea horizontal ABCDE de longitud 20 cm. Los puntos A, B, C, D y E son equidistantes entre sí y la partícula se demora 2 segundos en ir de B a C. Determinar:

a.- el tiempo que emplea la partícula en ir de D a E.
b.- la frecuencia de oscilación.
c.- la constante k del movimiento.

9.- Un cuerpo oscila con MAS de acuerdo con la siguiente ecuación: $x = 6 \cos(3\pi t + \pi/3)$ m. Determine

a.- la elongación, la velocidad y la aceleración en el instante $t = 0$s.
b.- el tiempo que emplea la partícula en ir desde $x = -3$ m a $x = 5$ m.
c.- la velocidad máxima.
d.- la aceleración máxima.
e.- su energía mecánica total en el instante $t=3$ s.

10.- Una partícula de 15 g se mueve sobre el eje x con MAS. La posición de equilibrio del movimiento está en el punto (10 ; 0) cm, su amplitud es 5 cm y para un tiempo $t = 0$ s la partícula se encuentra en el punto (13 ; 0) cm y dirigiéndose a la posición de equilibrio. Se conoce además que la partícula emplea 2 s en una vibración completa. Determine:

a.- las ecuaciones generales del movimiento: $x= f(t)$; $v= f(t)$ y $a = f(t)$.
b.- el valor máximo de la fuerza recuperadora.

c.- Para qué valores de x, con respecto al eje de coordenadas, serán máximos los valores de la velocidad y la aceleración

d.- El tiempo empleado por la partícula en ir desde el punto (6 ; 0) cm hasta el punto (9 ; 0) cm.

11.- Una partícula oscila con MAS en una recta que coincide con el eje de las x; el centro de la trayectoria está en el origen del sistema de coordenadas. Al tiempo t = 0s se encuentra en A (-5 ; 0) m moviéndose hacia la derecha con una rapidez de 20 m/s y una aceleración de 10 m/s^2 . Determine.

a.- La ecuación x = f(t) para este movimiento.

b.- En que instante, durante la primera oscilación, su velocidad será -20 $\vec{i}$ m/s.

12.- Un cuerpo vibra con MAS entre los puntos equidistantes ABC con una amplitud de 0.20 m. En ir desde la mitad del segmento AB hasta la mitad del segmento BC se demora 0.50 segundos, y en el instante t = 0 s el cuerpo se encuentra en la mitad del segmento AB y moviéndose hacia A. Determine.

a.- El ángulo de fase inicial.

b.- El período del movimiento

c.- Las ecuaciones del movimiento en función del tiempo

d.- La relación de la energía cinética y la energía potencial elástica, cuando el cuerpo pasa por el punto medio entre B y C.

13.- Un cuerpo de 2 kg ejecuta MAS sobre una recta horizontal ABCDE (cuyos puntos son equidistantes) de longitud 20 cm. El cuerpo se demora 2 s en ir desde A hasta B. Determine:

a.- El período del MAS.

b.- Sus ecuaciones generales, es decir: x = f (t) , v = f (t) y a = f (t). Si al instante t = 0 s el cuerpo se encuentra en B y dirigiéndose hacia C.

c.- La fuerza recuperadora que actúa sobre el cuerpo al pasar por D hacia la derecha utilizando los vectores unitarios $\vec{i}$ y $\vec{j}$.

14.- Un bloque de masa "m" sujeto a un resorte de constante k oscila con MAS sobre la recta horizontal ABC con una frecuencia de 1.5 ciclos/s y una fase inicial de π radianes. Sobre la línea CDE con una frecuencia de 11/4 ciclos/s y una fase inicial de o $\frac{\pi}{2}$ radianes otra partícula "n" oscila con MAS. Si los movimientos de las partículas comienzan en C; al cabo de 1.5 s determine:

a.- El vector posición de "n"respecto a "m" en términos de $\vec{i}$, $\vec{j}$.

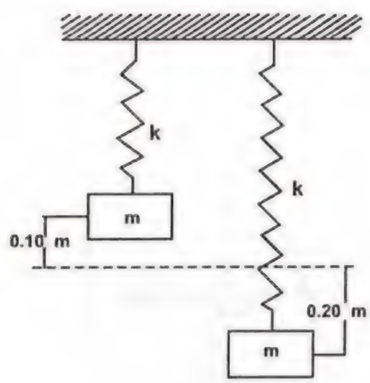
b.- La velocidad relativa de "m" respecto a "n" en términos de $\vec{i}, \vec{j}$.

15.- Una partícula oscila con MAS a lo largo de un segmento de recta vertical de 20 cm de longitud, con un período de 8 s. A t = 0 s la partícula se encuentra en la posición: y = 8 cm. Determine.

a.- El gráfico v vs t y a vs. t.
b.- ¿En qué instante pasa por segunda vez por la posición de equilibrio, luego de iniciado el movimiento?

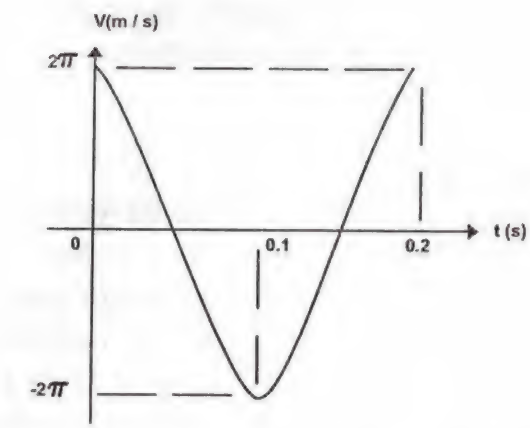
16.-Dos sistemas masa - resorte idénticos formados por resortes de k = 100 N/m y bloques de masas 2 g, cada uno, cuelgan verticalmente. Al primero se lo comprime una distancia de 0.10 m y al segundo se lo estira una distancia de 0.20 m. Simultáneamente se dejan en libertad los dos sistemas, los cuales oscilan verticalmente con MAS determine.

a.- Las ecuaciones y = f (t) para cada uno de los movimientos.
b.- El tiempo que tardan en encontrarse por primera vez
c.- La posición del punto del cruce anterior.



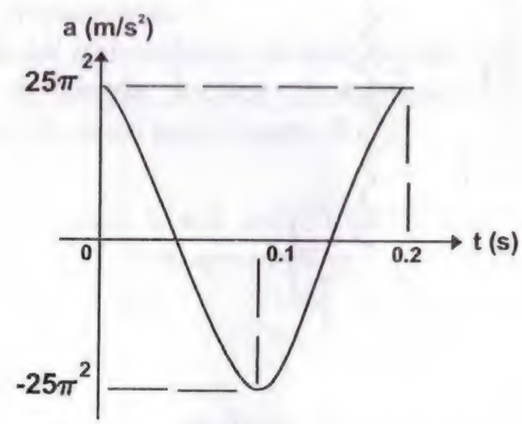
17.- Una partícula oscila con MAS sobre una línea horizontal de acuerdo al siguiente gráfico. Determine.

a.- La amplitud del movimiento.
b.- La ecuación de la elongación en función del tiempo.
c.- El gráfico correspondiente a x = f (t)



18.- Una partícula oscila con MAS sobre una línea horizontal de acuerdo al gráfico de la figura. Determine:

a.- la amplitud del movimiento.
b.- la ecuación de la velocidad en función del tiempo.
c.- el gráfico correspondiente a v = f(t).



19.- Un objeto de 0.20 kg está flotando en un líquido. Si lo sumergimos un poco más en el líquido y después lo soltamos comienza a oscilar con MAS de período 3.4 segundos/ciclo. Determine la densidad relativa del líquido.

20.- De un muelle o resorte está colgado un platillo de balanza con algunas pesas y el período de las oscilaciones verticales es de 0.5 s luego de colocar en el platillo más pesas, el período de las oscilaciones verticales se hizo igual a 0.6 s. Determine el alargamiento producido por las pesas añadidas.

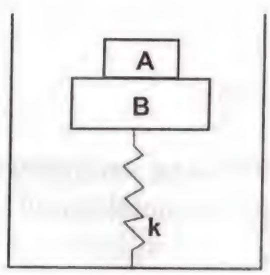
21.- Un bloque de 25.5 N está suspendido de un resorte de constante elástica k = 576 N/m. Se dispara contra el bloque, desde abajo una bala de 0.4 N, la cual se incrusta en el bloque. Si la amplitud del MAS resultante es 0.16 m; sin considerar la resistencia del aire. Determine:

a.- la frecuencia de oscilación.
b.- la rapidez máxima del MAS.

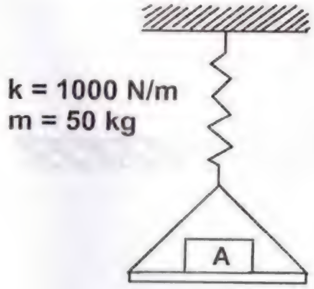
22.- Un resorte se coloca verticalmente y en su extremo libre se pone su bloque de 100 kg. Con una fuerza adicional de 10 N el bloque desciende 2 mm y al soltar el sistema masa - resorte se produce un MAS., determine el período de este movimiento.

23.- Dos bloques A y B, están situados sobre un resorte de constante k. Bajo estas condiciones el período de oscilación del sistema es 0.80 s/ciclo. Al retirar el bloque A, la frecuencia de oscilación aumenta a 2.0 ciclos/s. Determine:

a.- la masa del bloque B, conociendo que la de A es 14 kg.
b.- la constante elástica k.

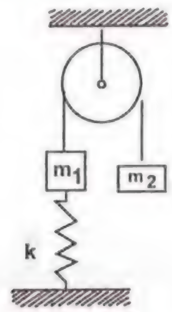


24.- Determine la amplitud y el período del movimiento que adquiere el sistema de la figura, las masas del platillo y del resorte son muy pequeños. El bloque está firmemente sujeto al platillo. El sistema inicia la oscilación cuando el platillo se encuentra a 2 cm del punto de equilibrio.



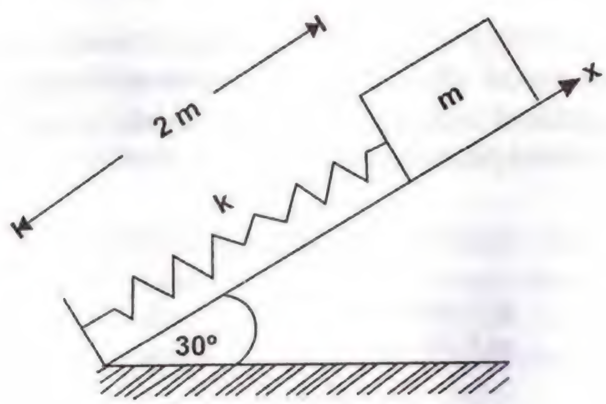
25.- Determine la variación del período de las oscilaciones verticales de un cuerpo de masa "m" que está colgado de dos resortes iguales; si estos en lugar de ponerse en serie se colocan en paralelo.

26.- En el sistema de la figura el bloque de masa m_1 está sujeto al resorte. Al separar el sistema de su posición de equilibrio, desplazando ligeramente uno de los cuerpos y luego soltándolo, se produce un MAS. Demostrar que el período de oscilación del movimiento está dado por: $\tau = 2\pi\sqrt{(m_1 + m_2) / k}$



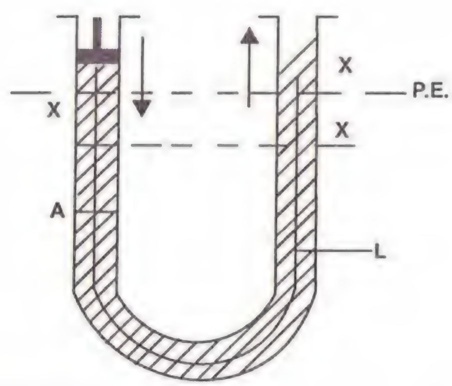
27.- El sistema masa - resorte se encuentra en la posición indicada en la figura dirigiéndose hacia abajo del plano con una energía cinética de 20 J. La longitud natural del resorte es 2 m, k = 50 N/m y m = 2 kg Determine

a.- La posición del equilibrio del sistema.
b.- La amplitud del movimiento.
c.- La energía mecánica total del sistema en los puntos cuya elongación vale $\pm$ (A/2), si se asume que la energía potencial gravitacional en la posición de equilibrio vale cero J.



28.- Determine el período de oscilación de un péndulo simple, que cuelga del techo de una caja de madera, que se desliza sin rozamiento sobre un plano inclinado un ángulo θ con la horizontal.

29.- Un tubo en U se llena de un líquido homogéneo. El líquido se empuja hacia abajo, en una de sus ramas con un pistón ó émbolo. Al retirar el émbolo, el nivel del líquido en ambas ramas oscila con MAS. Demostrar que el período de oscilación es $\pi\sqrt{2L/g}$,donde L es la longitud total del líquido en el tubo.



30.- Un sistema masa - resorte, con masa m vibra con una energía de 4 J cuando la amplitud de la vibración es de 5 cm. Se sustituye la masa m, por otra de valor m/2 y el sistema vibra con la misma amplitud. Determine la energía de vibración del MAS que se produce.

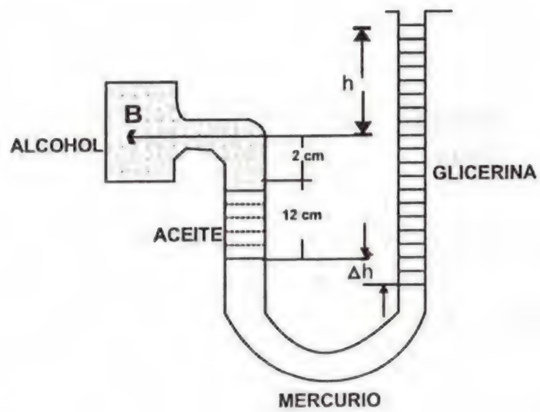
HIDROSTATICA

HIDROSTÁTICA

1.- En el manómetro de la figura la presión absoluta en el punto B es 2000 cm de alcohol. Determine:

a.- la cantidad de glicerina que debe añadirse, por el extremo abierto, para que el desnivel (Δh) entre las superficies de mercurio sea 2 cm.

b.- el valor de la columna de glicerina (h).



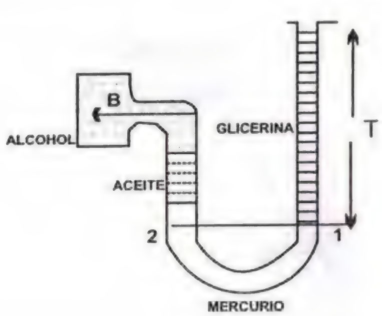
Densidad del alcohol = 0.85

Densidad del aceite = 0.80

Densidad del mercurio = 13.6

Densidad de la glicerina = 1.5

Sección o área del tubo = 4 cm^2



$V_{glic} = A \times h_T = 1879.73 \text{ cm}^3$

$m = V_{glic} \times \delta_{glic} = 1879.73 \text{ cm}^3 \times 1.5 \text{ g/cm}^3 = 2819.6 \text{ g}$

$P(1) = P(2)$

$P_B + P_{alc} + P_{ac} + P_{Hg} = P_{glic} + P_{atm}$

$\delta_{g'ic} \cdot g \cdot 2000\ cm + \delta_{alc} \cdot g \cdot 2\ cm + \delta_{ac} \cdot g \cdot 12\ cm + \delta_{Hg} \cdot g \cdot 2\ cm =$

$\delta_{glic} \cdot g \cdot h_T + \delta_{Hg} \cdot g \cdot 76\ cm$

$h_T = (\delta_{glc} \cdot 2002\ cm + \delta_{ac} \cdot 12\ cm + \delta_{Hg} \cdot 2\ cm - \delta_{Hg} \cdot 76\ cm) / \delta_{glic}$

$h_T = 469{,}9\ cm$

2.- En el tubo en "U" de la figura. Determinar el desnivel entre la superficie libre del mercurio y la del aceite.

Densidad del mercurio = 13.6

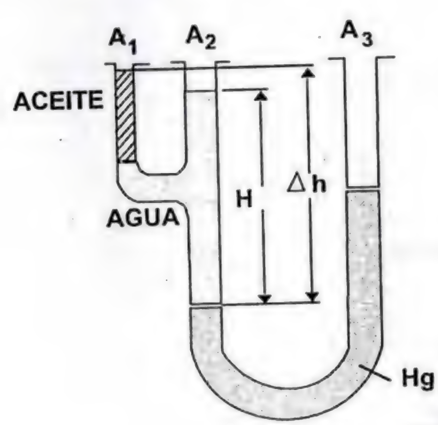
Densidad del agua = 1.0

Densidad del aceite = 0.9

Masa del aceite = 90 g

$A_1 = 5 cm^2; A_2 = A_3 = 10\ cm^2$

$H = 27.2\ cm$



$m = (A_1 \cdot h_1) \cdot \delta_{ac}$

$h_1 = 90\ g / (5 cm^2 \cdot 0.9\ g/cm^3) = 20\ cm$

$P_1 = P_2$

$\delta_{ac} \cdot g \cdot h_1 = \delta_{H20} \cdot g \cdot h_2$

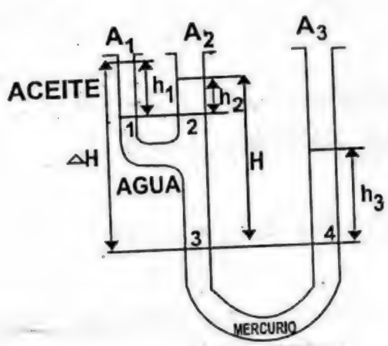
$h_2 = 20\ cm\ (0.9 / 1) = 18\ cm$

$P_3 = P_4$

$\delta_{H20} \cdot g \cdot H = \delta_{Hg} \cdot g \cdot h_3$

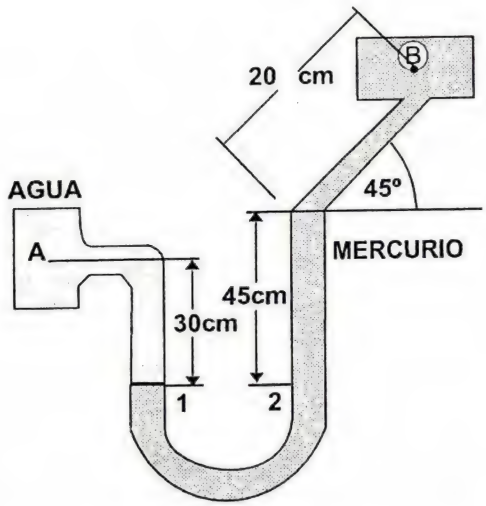
$h_3 = 27.2\ cm\ (1 / 13.6) = 2\ cm$

$\Delta h = 2cm + (H - h_3) = 2\ cm + (27.2\ cm - 2\ cm) = 27.2\ cm$



3.- En el tubo en "U" de la figura Calcule la diferencia de presiones entre los depósitos A y B.

Densidad del mercurio = 13.6
Densidad del agua = 1.0



$P_1 = P_2$

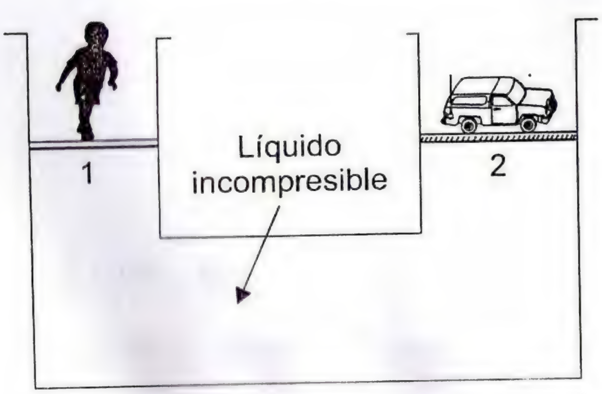
$P_A + P_{H2O} = P_B + P_{Hg_1} + P_{Hg_2}$

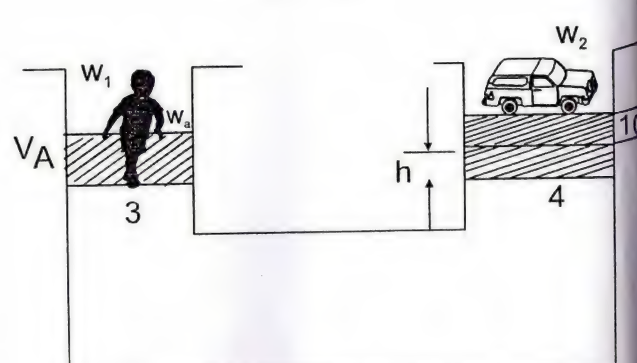
$P_A + \delta_{H2O}.g\ .\ 30\ cm = P_B + \delta_{Hg}\ .g\ .\ 45\ cm + \delta_{Hg}\ .g\ (20\ sen\ 45º)\ cm$

$(P_A + P_B) = 30000 - 13600\ (45 - 10\sqrt{2}) = 834333\ dina / cm^2$

4.- En la prensa de la figura se mantiene en equilibrio un niño de 30kg con un automóvil de 1000 kg. El área del pistón o émbolo grande es de 2000 cm^2. Determine el peso que debe sostener el niño para que el auto suba una distancia de 10 cm.

Densidad del líquido incompresible = 0.80
W_1 = peso del niño
W_2 = peso del auto
W_a = peso que se debe sostener





$P_1 = P_2$

$W_1 / A_1 = W_2 / A_2$

$A_1 = (30 . 2000) / 1000 = 60 \text{ cm}^2$

$P_3 = P_4$

$(W_1 + W_a) / A_1 = W_2 / A_2 + \delta_L . g \ (h + 0.1 \text{ m})$

$2000 \text{ cm}^2 . \ 10 \text{ cm} = 60 \text{ cm}^2 . h = 333.3 \text{ cm}$

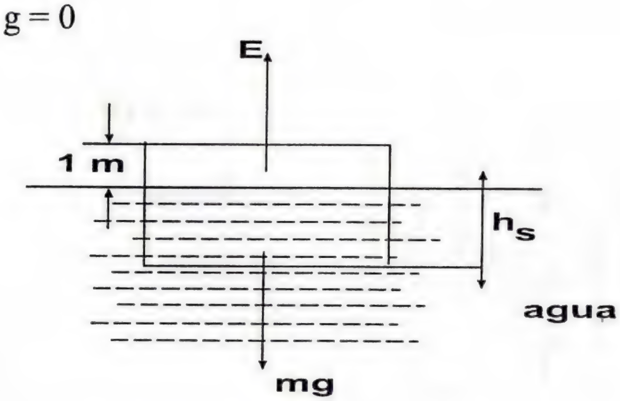
$(300 \text{ N} + W_a) / \ 60 \text{ cm}^2 = (1000 . 10 \text{ N}) / 2000 \text{ cm}^2 + 800 \text{ kg/m}^3 \ (10 \text{ m/s})^2 \ \ 3.33 \text{ m}$

$W_a = \ 164.4 \text{ N}$

5.- Un bloque cúbico de hielo (densidad = 0.9) flota en agua de mar (densidad = 1.2) con un metro fuera del agua. Determine:

a.- la altura del bloque sumergida en el agua de mar.
b.- el peso que se debe añadir, para que el bloque flote con 0.50 m fuera del agua.

a.- $\Sigma Fy = 0 : E - \ m . g = 0$



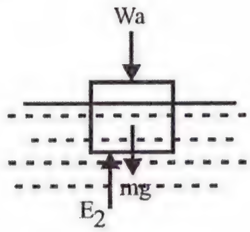
$E = m . g$

$\delta_{H2O} . g . A . h_s = \delta_{hielo} \ g . A (h_s + 1)$

$h_s / (h_s + 1) = \delta_{hielo} / \delta_{H2O} = 0.75$

$h_s = 3 \text{ m}$

b.-$\sum Fy = 0$



$E_2 - W_a - m.g = 0$ $\qquad W_a$ = Peso que se debe añadir

$W_a + m \cdot g = E_2$

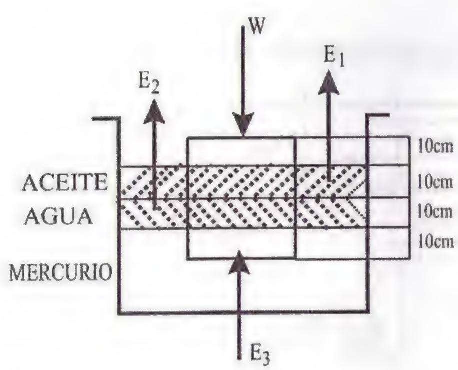
$W_a + \delta_{hielo} \cdot g\ (4^3) = \delta_{H2O} \cdot g \cdot 4^2\ (3.5)$

$W_a = \delta_{H2O} \cdot g\ (4^2)\ (3.5) - \delta_{hielo} \cdot g \cdot 4^3$

$W_a = 96000$ N

6.- Un cubo de 40 cm de arista está colocado en un recipiente que contiene varios líquidos no miscibles, como se indica en la figura. Determine la densidad del cuerpo.

densidad del aceite = 0.8
densidad del agua = 1.0
densidad del mercurio = 13.6



$\sum Fy = 0$

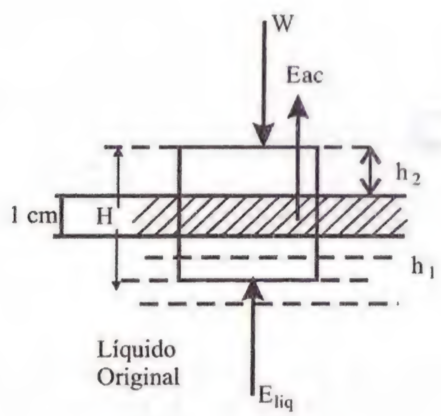
$E_1 + E_2 + E_3 = w$; A = área transversal del cubo

$\delta_{Hg} \cdot g \cdot A \cdot 10\text{ cm} + \delta_{H2O} \cdot g \cdot A \cdot 10\text{ cm} + \delta_{ac} \cdot g \cdot A \cdot 10\text{ cm} = \delta_c \cdot g \cdot A \cdot 40\text{ cm}$

$\delta_c = (13.6 + 1.0 + 0.8) / 4 = 3.67 \ g/cm^3$

7.-Un recipiente contiene inicialmente un líquido de densidad 1.2 y en el se coloca un cubo de densidad 0.8 y 8.0 cm^3 de volumen. Al colocar sobre el líquido inicial una cantidad suficiente de aceite (densidad 0.9) de tal manera que el espesor de la capa de aceite sea 1 cm. Determine:

a.- la altura del bloque que sobresale del nivel libre del aceite.
b.- el peso que se debe poner sobre la cara superior del bloque para que flote a ras con el nivel superior del aceite



a.- Σ Fy = 0

$$E_{liq} + E_{ac} = m.g$$

$$\delta_{liq} \cdot g \cdot V_{S\,liq} + \delta_{s\,ac} \cdot g \cdot V_{S\,ac} = \delta_c \ V_c \ g$$

$$\delta_{Liq} \cdot g \cdot A \cdot h_1 + \delta_{ac} \cdot g \cdot A \cdot h_{ac} = \delta_c \cdot A \cdot H \cdot g$$

$$h_1 = (\delta_{L} \cdot H - \delta_{ac} \cdot h_{ac}) / \delta_{liq}$$

$$h_l = 0.58 \ cm$$

$$h_2 = H - h_c - h$$

$$h_2 = 2 \ cm - 1 \ cm - 0.58 \ cm$$

$$h_2 = 0.42 \ cm$$

b.- Σ Fy = 0

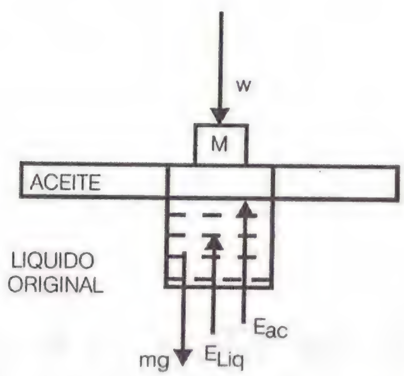
$E_{ac} + E_{liq} = m \cdot g + W$

$\delta_{ac} \cdot g \cdot A \cdot h_{ac} + \delta_{liq} \cdot g \cdot A \cdot h_{liq} = \delta_{c} \cdot V_{C} \cdot g + W$

$m = \delta_{ac} \cdot A \cdot h_{ac} + \delta_{liq} \cdot A \cdot h \vdash \delta_{c} V_{c}$

$m = 2$ kg

$w = m \cdot g = 0.02$ N



.- Un cuerpo de forma cilíndrica y de altura h se encuentra suspendido en el interior de dos líquidos de acuerdo al gráfico. Si las densidades de los líquidos son 13.6 y 4.5. Calcular la densidad del cuerpo.

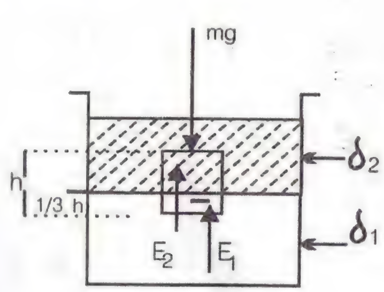
$\sum Fy = 0$

$E_1 + E_2 = m \cdot g$

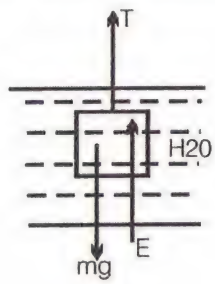
$\delta_2 \cdot Vs_2 \cdot g + \delta_1 \; Vs_1 \cdot g = \delta_c \cdot A \cdot h$

$\delta_c = (2\delta_2 + \delta_1) / 3$

$\delta_c = 7.53 \text{ g} / \text{cm}^3$



9.- Una pieza de aluminio y oro de 50 N suspendido de una balanza de resorte se sumerge en agua y la balanza indica 40 N. ¿Cuál es la masa de cada uno de los materiales en la aleación?. Las densidades del oro y del aluminio son 19.3 y 2.5 g / cm^3 respectivamente.



Σ Fy = 0

T + E = m . g

E = m . g - T = 10 N

$\delta_L . V_c . g = 10$ N

$V_c = V_{Au} + V_{Al} = (m_{Au} ./ \delta_{Au} + m_{Al} / \delta_{Al})$

$\delta_L . g (m_{Au} / \delta_{Au} + m_{Al} / \delta_{Al}) = 10$ N (1)

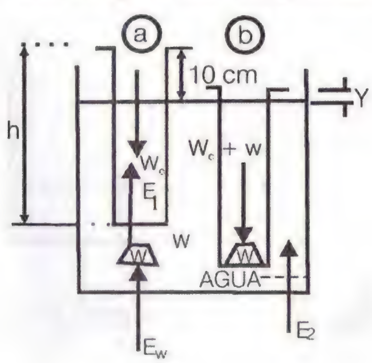
$m_{Al} + m_{Au} = 5$ kg

$m_{Al} = 5 - m_{Au}$ (2)

(2) en (1) y resolviendo: m_{Au} = 2.872 kg reemplazando en (2)

m_{Al} = 2.128 kg

10.- Un cilindro vacío de diámetro 20 cm flota en agua (densidad = 1.0) con 10 cm de su altura (h) por encima del nivel de agua, debido a un bloque de hierro (densidad = 7.80) de 100 N que está suspendido en su parte inferior (fig a.) Si el



bloque de hierro es colocado dentro del cilindro (fig. b). Determinar la altura (Y) del cilindro que se halla por encima del nivel del agua.

$W_{Fe} + W_c = E_{Fe} + E_1 \quad (1)$

$W_{Fe} + W_c = E_2 \quad (2)$

$E_{Fe} + E_1 = E_2$

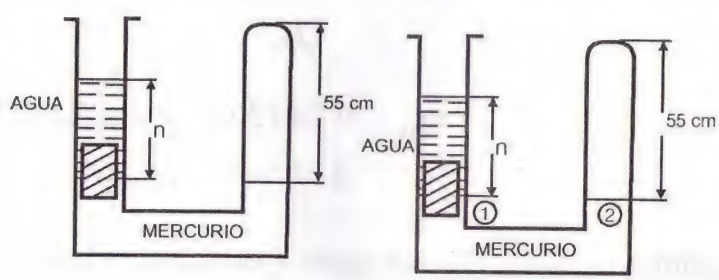
$V_{Fe} \cdot \gamma_{Fe} + V_{S1} \cdot \gamma_L = V_{S2} \cdot \gamma_L$

$(V_{Fe} / \gamma_{Fe}) + \pi R^2 (h - 0.1) = \pi R^2 (h - y)$

$y = 0.06 \text{ m} = 6 \text{ cm}$

11.- En el tubo en "U" de la figura se observa un bloque de metal que flota con (1/8) de su volumen sumergido en mercurio (densidad= 13.6) y el resto en agua (densidad= 1.0). Si la presión atmosférica local (presión de Quito) es 540 mm de Hg. Determine:

a.- la altura de la columna de agua.
b.- la densidad del metal
c.- si el volumen del bloque es 10 cm^3, calcule el empuje total.



a.- $P_1 = P_2$

$P_{atm} + P_{H2O} = P_{Hg}$

$\delta_{Hg} \cdot g \cdot 54 \text{ cm} + \delta_{H2O} \cdot g \cdot h = \delta_{Hg}\, g \cdot 55 \text{ cm}$

$h = 13.6 \text{ cm}$

b.- $\Sigma Fy = 0 \qquad W = E_2 + E_1$

$m.g = \delta_{H2O}(7/8)\,V\,.\;g + \delta_{Hg}.\,(1/8)\,V\,.\,g$

$V\,.\,\delta_m = (7/8)\;V\,.\delta_{H2O} + (V/8)\delta_{Hg}$

$\delta_m = 2.57$

c.- $E_T = E_I + E_2 = W$

$E_T = V.\,\delta_m\,.\,g = 10\ cm^3\ 2.57\ g / cm^3.\ 1000\ cm/s^2$

$E_T = 2.57\ .\ 10^4$ dinas

12.- Se tiene un recipiente lleno de agua (densidad = 1.0) de profundidad 1.50 m, en el fondo descansa un resorte vertical ideal de masa despreciable, de constante elástica k = 100 N/m y su longitud en el interior del líquido es de 60 cm. Se deja caer una esfera de 0.10 kg desde una altura de 1.0 m sobre el nivel libre del agua, la esfera atraviesa el líquido y choca con el resorte comprimiéndole 10 cm. Determine:

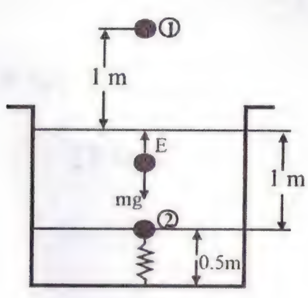
a.- el trabajo que realiza el empuje durante el descenso de la esfera
b.- la densidad de la esfera.
c.- la velocidad de la esfera en el instante que choca con el resorte.

a.- $E_{T1} = E_{T2} + T_E$

$m\,.\,g\,.\,h_T = (½)\,k\,.\,x^2 + T_E$

$0.1\ kg\ .\ 10m/s^2\ \ 2.0\ m = ½\ .\ (100\ N/m)\ (0.1)^2\ m^2 + T_E$

$T_E = 2$ Joules - 0.5 Joules = 1.5 Joules



b.- $E = T_E / \Delta r = 1.5\ J / 1.0\ m = 1.5\ N = V\,.\,g\,\delta_L$

$V = (1.5\ \ kg\ m/s^2) / (1000\ kg/m^3\ .\ 10\ m/s^2) = 1.5\ .\ 10^{-4} .m^3$

$\delta = m / V = 0.1\ kg / 1.5\ 10^{-4} .m^3 = 670\ kg/m^3$

$\delta_r = \delta / \delta_{H20} = 670\ kg/m^3 / 1000\ kg/m^3 = 0.67$

c.- $\sum Fy = m\ .\ a$

$m\ .\ g - E = m\ .\ a$

$\delta_c\ .\ g - V - \delta_L\ .\ g\ .\ V = (V\ \delta_c)\ a$

$a = g\ ((\delta_c\ \delta_L) / \delta_c)$

$a = 10\ m/s^2\ \ ((0.67 - 1.0) / 0.67) = 4.92\ m/s^2$

$V_f^2 = V_o^2\ -\ 2.a.\ .\Delta\ r$

$V_o = \sqrt{2\ .\ g\ .\ h} = \sqrt{2\ .\ 10\ m/s^2\ \ (1.0\ m)} = \sqrt{\ 20\ m/s}$

$V_f^2 = 20\ m^2\ /s^2 -\ 2 \times 4.92 \times 1.0\ \ m^2 /s^2$

$V_f = 3.17\ m/s$

13.- La densidad del hielo que flota en agua (densidad = 1) es 0.92, determinar:

a.- el porcentaje del volumen de un cubo de hielo que flota por encima del agua.
b.- el volumen de hielo que puede soportar a un niño de 40 kg.

a.- $\Sigma Fy = 0$

$E = m\ .\ g$

$\delta_{H2O}\ \ g\ V_{cs} = \delta_H\ \ g\ V_H$

$V_{cs} / V_H = \delta_H\ /\ \delta_{Agua} = 0.92\ \ g/cm^3 / 1\ g /cm^3 = 0.92$

$\%\ V_{Sumergido}\ \ = 92\ \%$

$\%\ V_{Sobresale}\ = 8\ \%$

b.- $\Sigma Fy = 0$

$E_H = W_N + W_H$

$\delta_{H2O} \cdot V_H = W_H + \delta_H \cdot V_H$

$(\delta_{H2O} - \delta_H) V_H = W_N$

$(1 \text{ gr*/cm}^3 - 0.92 \text{ gr*/cm}^3) V_H = 40000 \text{ g*}$

$V_H = 500 \times 10^3 \text{ cm}^3$

14.- Una piedra tiene un peso aparente de 5.4 N al estar sumergida en el agua (δ = 1) y si la sumergimos en aceite (δ =0.8) el peso aparente de la piedra es de 6N. Determine el peso específico de la piedra.

$Wap_{(piedra)} = 5.4$ N en agua $\delta = 1$

$Wap_{(piedra)} = 6$ N en aceite $\delta = 0.8$

$\delta_{(piedra)} = ?$

$5.4 \text{ N} = W_{ai} - W_{H2O}$

$6 \text{ N} = W_{ai} - W_{aceite}$

$540 \text{ gr*} = W_{ai} - 1 \text{ gr*/cm}^3 \cdot V_c$

$600 \text{ gr*} = W_{ai} - 0.8 \text{ gr*/cm}^3 \cdot V_c$

$(W_{ai} - 540 \text{ gr*}) / 1 \text{ gr*/cm}^3 = V_c$

$600 \text{ gr*} = (W_{ai} - 0.8 \text{ gr*/cm}^3) \ (W \ - 540 \text{ gr*}) / 1 \text{ gr*/cm}^3$

$600 \text{ gr*} = W_{ai} - 0.8 W / - 432 \text{ gr*}$

$1032 \text{ gr*} = 0.2 W_{ai}$

$V_C = 4620 \text{ cm}^3$

$W_{ai} = 5160 \text{ gr*}$ $\delta_{piedra} = 1.12 \text{ gr*/cm}^3$

PROBLEMAS PROPUESTOS

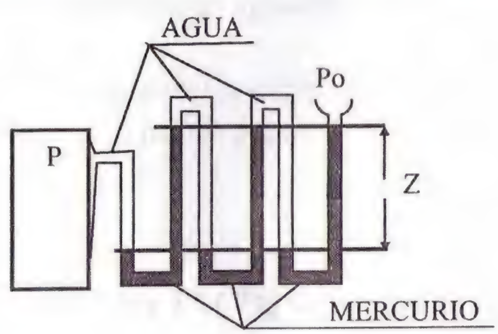
1.- Por un tubo en "U" que contiene mercurio (δ = 13.6), se vierte por una de las ramas 15 g de agua (δ = 1.0). Por el otro extremo se pone 25 g de alcohol industrial (δ = 0.85); considerando que el diámetro del tubo es uniforme e igual a 4 cm. Calcule la diferencia de alturas entre los niveles del mercurio.

2.- El peso específico del aceite es 50 lb^*/ft^3 y la densidad del mercurio 13.6 g/cm^3. Encontrar la densidad del mercurio respecto al aceite.

3.- En un tubo en "U" que inicialmente contiene mercurio (δ = 13.6), se colocan 60 g de agua (δ = 1.2) por el ramal de 4 cm^2. ¿ Qué volumen de aceite (δ = 0.8) se debe poner por la otra rama de 2 cm^2 para que los niveles de mercurio se igualen.

4.- Se tiene un tubo en "U" que contiene mercurio (δ = 13.6). Por el extremo más delgado, de sección 2 cm , se colocan 16 g de aceite (δ = 0.80). ¿Qué masa de agua deberá ponerse por la otra rama, de sección 4 cm , para que el nivel libre del aceite quede 5 cm más arriba del nivel libre del agua (δ = 1.0).

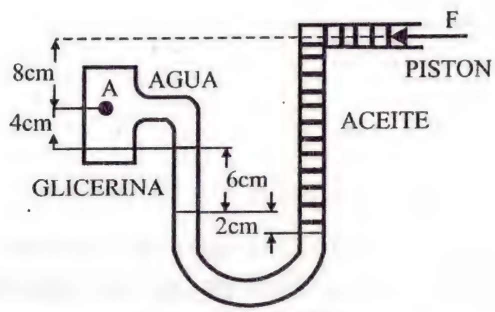
5.-En el manómetro de la figura determinar la relación entre la presión P de la caldera, la presión exterior Po y la lectura manométrica.



6.- En el manómetro de la figura. Determine el valor de la fuerza F ejercida por el pistón de área 8.0 cm^2 conociendo que la presión absoluta en el punto A es 2 atmósferas normales.

Densidad del mercurio = 13.6
Densidad del agua = 1.0

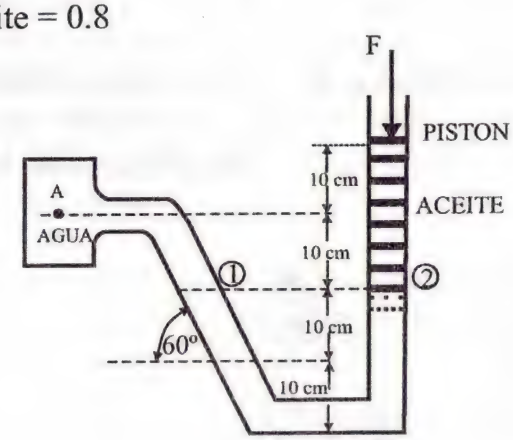
Densidad del aceite = 0.80
Densidad de la glicerina = 1.5
Presión normal = 760 mmHg



7.- La sección del tubo de la figura es constante e igual a $10\ cm^2$. Si se aplica una fuerza (F) de 30 N en el pistón que indica la figura. Determine:

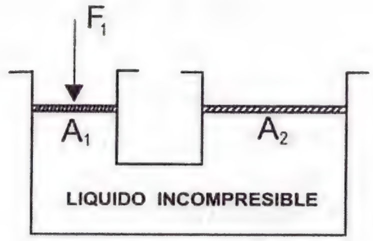
a.- Si son o no son iguales los valores de las presiones absolutas en los puntos 1 y 2. Explicar su respuesta.
b.- El valor de la presión absoluta en el punto A.

Densidad del mercurio = 13.6
Densidad del agua = 1.0
Densidad del aceite = 0.8



8.- Se tiene una prensa hidráulica como se indica en la figura, las áreas de los pistones son 10 y $100\ cm^2$ respectivamente. Si aplicamos una fuerza F de 0.80 N al pistón pequeño. Determine la altura que sube el pistón de mayor área.

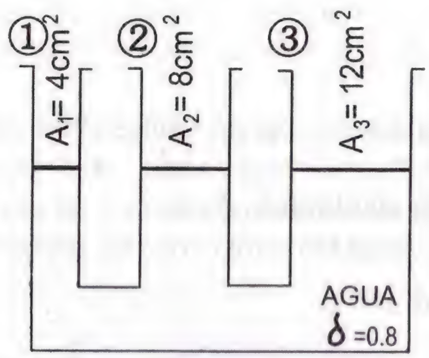
Densidad del fluido incompresible = 0.80
Despreciar las masas de los pistones y toda clase de rozamiento.



9.- En cada cilindro se vierten 120 ml de aceite ($\delta = 0.75$). Determine:

a.- la diferencia de alturas entre los niveles del agua en los vasos 1 y 3.

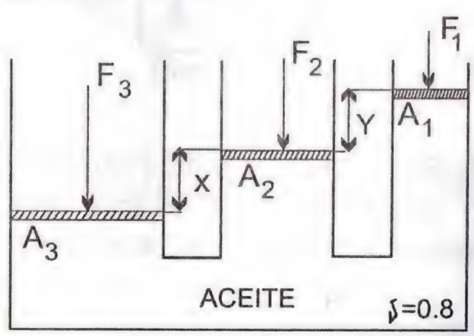
b.- el volumen adicional de aceite que se debe poner y en qué vaso para nivelar nuevamente las superficies de agua en los tres vasos.



10.- Se tiene tres pistones de áreas A_1, A_2 y A_3 cuyos valores son: 100, 150 y 200 cm^2 respectivamente. Los émbolos o pistones se encuentran cargados con fuerzas F_1, F_2 y F_3 de 140, 225 y 320 kgf respectivamente. Determine:

a.- los valores de X y de Y cuando el sistema se halla en equilibrio.

b.- la altura que desciende el émbolo de área A_2, al aplicar una fuerza adicional de 100 kg.



11.- Un bloque cúbico de 40 kg está suspendido de una cuerda y sumergido totalmente en aceite de densidad 0.80. Si las presiones manométricas en la cara superior e inferior del bloque son: 2400 N/m^2 y 3200 N/m^2. Determine:

a.- la altura, respecto al nivel libre del líquido, a la que se encuentra la cara superior del bloque.
b.- el lado o arista del cubo.
c.- la tensión en la cuerda.

12.- Un objeto cúbico de 50 cm de lado y masa 400 kg está suspendido de una balanza de resorte y sumergido completamente en un líquido de densidad 0.8 La cara superior del cubo se encuentra a 25 cm de profundidad. Calcule:

a.- la fuerza total ejercida por el líquido sobre la cara superior del bloque.
b.- la fuerza que hace el líquido sobre la cara inferior del bloque
c.- la lectura de la balanza.

13.- Cinco sapitos de 0.50 kg cada uno, están descansando (tomando sol) sobre una balsa rectangular de sección transversal 0.25 m^2 que flota parcialmente sumergida en una laguna ($\delta = 1.0$). Una vez que todos regresan a la orilla. Determine la altura que sube la balsa respecto a la superficie libre del agua.

14.- Un globo de 10 cm de radio está lleno de gas de densidad 10^{-4} y atado de una cuerda a un punto fijo. Determine la tensión en la cuerda, si la densidad del aire es 10^{-3}; no considere el peso del material del cual esta hecho el globo.

15.- Un cubo de corcho de arista 10 cm y densidad 0.50 está flotando en mercurio de densidad 13.6. Determine:

a.- la densidad de un cuerpo de volumen $2 \times 10^3 cm^3$ que se adhiere en la cara inferior del corcho, para que la cara superior del mismo quede a ras del nivel libre del líquido.
b.- la masa del cuerpo anterior que se debe poner encima del corcho, para que este flote en la misma condición anterior.

16.- Un bloque de aluminio de 0.50 m de largo, 0.30 m de ancho y 0.12 m de altura flota en un recipiente que contiene mercurio. Se coloca un cubo de plomo sobre el bloque, de tal manera que el bloque se sumerge las 2/3 partes de su altura. Determine:

a.- El volumen del cubo de plomo.
b.- La fuerza que ejerce el líquido sobre la cara inferior del bloque.

Densidad del aluminio = 2.70
Densidad del mercurio = 13.6
Densidad del plomo = 11.3

17.- En un recipiente que contiene agua (δ = 1.0) y aceite (δ = 0.70), se coloca una boya de altura H en forma vertical. La boya queda sumergida las 2/3 partes de su altura en agua y el resto en aceite. Determine:

a.- la densidad de la boya
b.- la cantidad de hierro (δ = 7.2) que se debe colocar sobre la boya, en función del volumen de la boya, para que la superficie superior de la boya coincida con el nivel libre del agua. Considere que el hierro esta totalmente sumergido en el aceite.

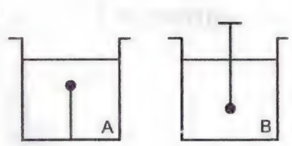
18.- Una plomada suspendida de un dinamómetro y sumergida totalmente en agua (δ = 1.0) tiene un peso aparente de 9.8 N. Se adhiere a la plomada un trozo de cera (δ = 0.9) y sumergidos los dos cuerpos en el agua el dinamómetro marca 9.702 N. Determine el volumen del pedazo de cera.

19.- Un bloque de madera flota con las 2/3 partes de su volumen sumergido en el agua. En aceite se sumerge el 90 % de su volumen. Si la densidad del agua es 1.0. Determine la densidad:

a.- de la madera
b.- del aceite

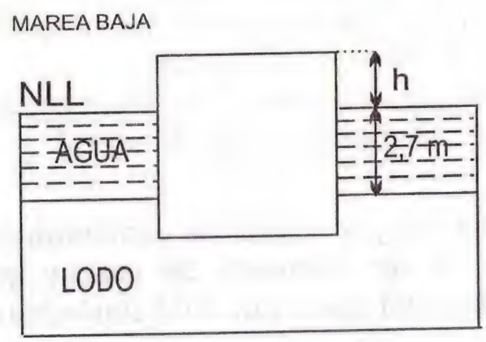
20.- Una boya cilíndrica de 80 cm de altura y reacción transversal 4 cm^2 verticalmente flota con la mitad de su volumen sumergido, en un lugar del océano donde se ha regado petróleo (δ = 0.8). Si la densidad de la boya es 0.55 y la del agua de mar 1.2. Calcule el espesor de la capa de petróleo.

21.- Un cuerpo que pesa 20 N en el aire se sumerge en dos líquidos diferentes A y B atado con una cuerda como se indica en la figura. La tensión de la cuerda es de 10N en los dos casos. Encontrar la relación entre la densidad del líquido A [illegible]sidad del líquido B.



22.- Una gabarra de forma rectangular que tiene una altura de 4.5 m está sumergida 3 m cuando flota en agua salada ($\delta = 1.2$) y con marea alta. Cuando el nivel del agua baja 1.8 m (marea baja), la gabarra penetra parcialmente en el lodo blando ($\delta = 2.4$) que cubre el fondo del puerto. Considerando que el lodo se comporta como un líquido, determine:

a.- la densidad promedio de la gabarra.
b.- la altura h de la gabarra que emerge del agua



23.- En un recipiente cilíndrico de radio R y altura 25 cm, en el que hay agua hasta una altura de 10 cm, está flotando otro cilindro de radio r y altura 12 cm completamente lleno de bencina ($\delta = 0.75$). Se va poniendo agua poco a poco del depósito grande en el chico. La bencina irá rebosando y pasando al depósito grande, al mismo tiempo el cilindro que flota se irá hundiendo. Determinar hasta que altura llegará el agua en el depósito que flota, en el momento en que su base se apoya en la del recipiente grande. $R = \sqrt{2} \cdot r$

24.- Un hombre y una piedra están sobre una balsa que flota en una piscina de 20 m de largo y 10 m de ancho. La piedra pesa 250 N y su densidad es 2.5. Si el hombre arroja la piedra a la piscina ¿en cuánto variará el nivel del agua de la piscina por el cambio experimentado?. Indicar además si subirá o bajará el nivel del agua.

25.- Un pedazo de corcho ($\delta = 0.6$) se suelta a una profundidad de 20 m respecto al nivel libre del agua ($\delta = 1.0$). Calcule la altura, respecto al Nivel libre del líquido, hasta donde sube el corcho.

26.- Un pedazo de corcho ($\delta = 0.6$) y masa 0.1 kg se suelta desde una profundidad H, respecto al nivel libre del agua ($\delta = 1.0$). Si el trabajo

neto realizado sobre el corcho hasta cuando llega a la superficie es de 120 Joules. Determine:

a.- la profundidad H desde la cual se soltó el corcho.
b.- la altura que alcanza sobre el nivel libre del líquido.
c.- el tiempo empleado por el corcho en llegar a la superficie libre del agua mientras sale

27.- Se tiene un recipiente de mucha profundidad lleno de mercurio (δ= 13.6). Desde una altura de 12 m sobre la superficie libre del líquido se deja caer libremente un cuerpo de densidad 8.4. Determine.
a.- la máxima profundidad que alcanzará el cuerpo en el seno del líquido.
b.- el tiempo que tardará en alcanzar dicha profundidad.

28.- Determine el trabajo realizado por la presión para transportar 1.5 m^3 de agua por una tubería de 1.5 cm de diámetro. Se conoce que la diferencia de presiones entre los extremos del tubo es de 1.05 atmósferas.

29.- El último piso de un edificio se encuentra a 90 m sobre el nivel de las tuberías de agua situadas en la calle. Se conoce que la presión del agua (δ = 1) en las tuberías es de 4.25x 10^5 Pa. Determinar hasta que altura subirá el agua sin necesidad de una bomba.

30.- Determine la diferencia de presión atmosférica entre el nivel de la calle y el de la azotea de un edificio que se encuentra a 120 m de altura. Se conoce que la densidad del aire es de 1300 kg/m^3.

HIDRODINAMICA

HIDRODINAMICA

1.- Una manguera de jardín que tiene un diámetro de 2 cm se conecta con un aspersor de césped que consiste en un recipiente con agujeros, el diámetro de cada agujero es de 4 cm. Si el agua en la manguera tiene una velocidad de 100 cm/s.

Determine la velocidad del agua cuando sale por los agujeros del aspersor.

ϕ_m = diámetro de la manguera = 2 cm

ϕ_a = diámetro del aspersor = 0.4 cm

v_m = rapidez del agua en la manguera = 100 cm/s

v_a = rapidez del agua al salir del aspersor = ?

Q = área x rapidez = constante, en nuestro caso:

$v_m \,.\, A_m = v_a \,.\, A_a$

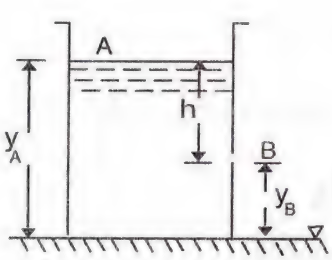
$v_a = (v_m \,.\, A_m) / A_a \quad A = \pi \,.\, r^2$ r = radio

$v_a = ((\phi_m / 2)^2 / (\phi_m / 2)^2) \,.\, v_m$

$v_a = ((2/ 2)^2 / (0.4)^2 /4) \,.\, 1 \text{ m/s}$

$v_a = 25 \text{ m/s}$

2.- Demostrar que la velocidad de salida de un liquido por un orificio realizado en la pared lateral de un recipiente, considerando la velocidad del líquido en la parte superior del recipiente es igual a: $v_B = \sqrt{2.g.h /(1- (v_A^2 \ / v_B^2 \ ))}$.



$v^2_A / 2g + y_A = v^2_B / 2g + y_B$

$(P_A / \rho_L) + (v^2_A / 2g) + y_A = (P_B / \rho_L) + (v^2_B / 2g) + y_B$

$(v^2_B / 2g) = (v^2_A / 2g) + (y_A - y_B) \qquad y_A - y_B = h$

$v^2_B = v^2_A + 2gh \qquad\qquad v^2_B - v^2_A = 2gh$

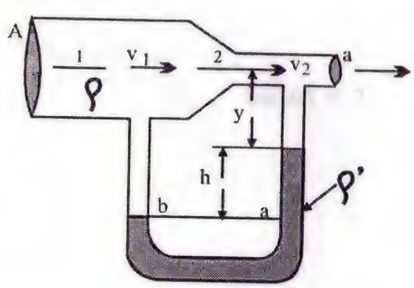
Dividiendo toda la ecuación anterior para v^2_B, tenemos:

$(v^2_B - v^2_A) / v^2_B = 2gh / v^2_B$

$v^2_B = 2gh / ((v^2_B - v^2_A) / v^2_B) \qquad v^2_B = 2gh / (1 - (v^2_A / v^2_B))$

por tanto : $v^2_B = \quad 2gh / (1 - (v^2_A / v^2_B))$ L.Q.Q.D.

3.- Planteando los principios de Bernoulli y de la Continuidad a las secciones 1 y 2 de la tubería de la figura, demuestre que la velocidad del fluido en el punto 1 es:



$v_1 = a \cdot \sqrt{((\rho - \rho) / \rho (A^2 - a^2)) \cdot 2gh}$

Donde: ρ^1 = peso específico del líquido colocado en el tubo en "U".

ρ = peso específico del líquido que circula por la tubería

$(P_1 / \rho) + (v^2_1 / 2g) + y_1 = (P_2 / \rho) + (v^2_2 / 2g) + y_2$

$y_1 = y_2 = 0$ por tratarse de una tubería horizontal

$(P_1 - P_2) / \rho = (v^2_2 - v^2_1) / 2g$

$Q = A \cdot v = \text{constante} \neq 0$

$Q_1 = Q_2$ $\qquad$ $A \cdot v_1 = a \cdot v_2$

$v_2^2 = (A/a)^2 \cdot v_1^2$

en el tubo en "U":

$P_B = P_c \Rightarrow \rho\,(h + y) + P_1 = \rho'\,(h) + \rho\,(y) + P_2$

$(P_1 - P_2) = h\,(\rho' - \rho)$

$h(\rho' - \rho)/\rho = ((A/a)^2 \cdot v_1^2 \cdot v_2^2)/2g$

$v = a \cdot \sqrt{((\rho' - \rho)/\rho\,(A^2 - a^2)).2gh}$

4.- En una tubería de vidrio de 2 mm de diámetro interior, colocada en el sótano de un laboratorio, fluye agua. La tubería se eleva al segundo piso situado a una altura de 7 m en donde se reduce su diámetro a 1 mm. Se conoce que la presión del agua de la tubería en el sótano es $2 \times 10^5 N/m^2$ y la velocidad del agua es 1 m/s. Determine la presión y la velocidad del agua en la tubería en el segundo piso.

$Q = A \cdot v = \text{constante}$

$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$

$v_2 = (A_1 / A_2) \cdot v_1 \quad v_2 = (2\ mm / 1mm)^2 (1\ m/s)$

$v_2 = 4\ m/s$

$(P_1/\rho) + (v_1^2/2g) + y_1 = (P_2/\delta) + (v_2^2/2g) + y_2$

$\rho_{H2O} = 10^3 kg/m^3 \quad \rho = \rho \cdot g$

$P_2 = P_1 + \rho\,(v_1^2/2) - \rho\,(v_2^2/2) - \rho\, g\, y \ , y$

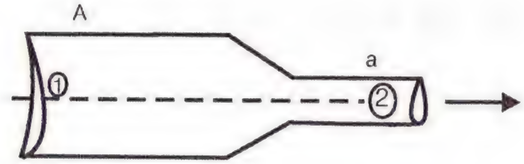
$P_2 = 2.10^5\ N/m^2 + ½\,(10^3\ kg/m^3)(1\ m/s)^2 - ½\,(10^3\ kg/m^3)(4\ m/s)^2 - (10^3$

$kg/m^3)(9.8\ m/s^2)(7\ m)$

Realizando las operaciones:

$P_2 = 1.24 \times 10^5 N/m^2$

5.- La presión en ei punto 1 es igual a 2 atmósferas y el área A = 5a (a= área menor). Determine los valores de la velocidad en los puntos 1 y 2, de tal manera que la presión en el punto 2 sea igual a cero atmósferas.



$(P_1/\rho) + (v_1^2/2g) + y_1 = (P_2/\rho) + (v_2/2g) + y_2$

$y_1 = y_2$ tubería horizontal

$(P_1/\rho) + (v_1^2/2g) = (v_2^2/2g)$

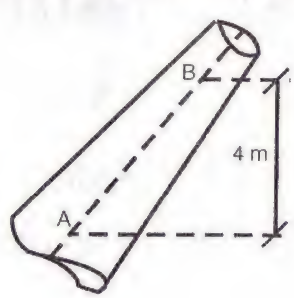
$Q = v_1 . A = v_2 . a \quad v_2 = (5a/a)\, v_1 \quad v_2 = 5v_1$

$(P_1/\rho) + (v_1^2/2g) = ((5v_1)^2/2g)$

$(P_1/\rho) + (v_1^2/2g) = (25v_1^2/2g)$

$P_1/\rho = 24\, v_1^2/2g \quad v_1 = 4.11$ m/s $\quad v_2 = 20.5$ m/s

6.- En un punto A de una tubería que transporta agua ($\rho = 10^3$ kg*/m^3), la sección es de 300 cm^2 y la presión manométrica de 1.0 Kg*/cm^2 . En otro punto B, 4 metros más alto que A, la sección es de 150 cm^2 y la presión manométrica 0.6 Kg*/cm^2. Para un caudal de 30 l/s Determine la dirección del flujo de agua.



$P_{man\,(A)} = 1$ kg*/cm^2

$P_{man\,(B)} = 0.6$ kg*/cm^2

$A_{(A)} = 300$ cm^2

$A_{(B)} = 150$ cm^2

$Q = 30$ l/s

$Q = A.v =$ constante

$Q = A_{(A)} \cdot v_{(A)} = A_{(B)} \cdot v_{B}$

$v_{(A)} = Q / A_{(A)} = (30000 \text{ cm}^3/\text{s}) / (300 \text{ cm}^2) = 1$ m/s

$v_{(B)} = Q / A_{(B)} = (30000 \text{ cm}^3/\text{s}) / (150 \text{ cm}^2) = 2$ m/s

La energía total del agua en el punto A es: $E_{(A)}$.

$E_{(A)} = (P_{(A)}/\rho) + (v^2_A / 2g) + (y_A)$

$E_{(A)} = (10^4 \text{ kg*/m}^2) / (10^3 \text{ kg*/m}^3) + (1 \text{ m}^2/\text{s}^2) / (20 \text{ m/s}^2) + 0$

$E_{(A)} = 10.05$ m

La energía total del agua en el punto B es: $E_{(B)}$

$E_{(B)} = (P_{(B)}/\rho) + (v^2_B / 2g) + (y_B)$

$E_{(B)} = (0.6\text{x}10^4 \text{ kg*/m}^2) / (10^3 \text{ kg*/m}^3) + (4 \text{ m}^2/\text{s}^2) / (20 \text{ m/s}^2) + 4$

$E_{(B)} = 10.2$ m

Como $E_{(B)} > E_{(A)}$, el flujo de agua en la tubería es de B hacia A.

7.- Por una tubería horizontal de sección variable circula agua; en un punto determinado la presión del agua es 20 kg*/cm^2 y la rapidez 3 m/s. Calcule

a) La presión en el punto donde la velocidad es 6 m/s

b) la velocidad en el punto donde la presión es 18 kg*/cm

$$(P_1/ \rho) + (v_1^2 / 2g) + y_1 =(P_1 / \rho) + (v_1^2 / 2g) + y_2$$

$$(P_1 / \rho) + (v^2{}_1 / 2g)= (P_2 / \rho) +(v^2{}_2 / 2g)$$

$$\rho = \delta .g$$

$$P_2 = P_1 + (\delta (v^2{}_1 - v^2{}_2) / 2)$$

$$P_2 = 20 \text{ kg*/cm} + (½) . 10^3 \text{ kg/m}^3 (9 \text{ m}^2 /\text{s}^2 - 56 \text{ m}^2 /\text{s}^2)$$

$$P_2 = 19.86 \text{ kg*/cm}^2$$

De la misma ecuación:

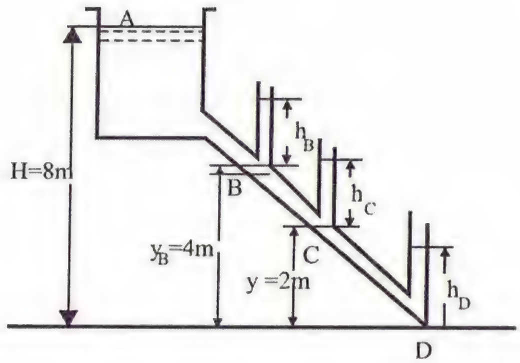
$$P_2 - P_1 = (\delta (v^2{}_2 - v^2{}_1) / 2)$$

$2 \text{ kg*/m}^2 = 500 \text{ kg/m}^3 . (v^2{}_2 - v^2{}_1)$, de donde

$$v_2 = 20 \text{ m/s}$$

8.- Un depósito A, de grandes dimensiones, está conectado a una tubería inclinada como se indica en la figura. Determine:

a) las velocidades en las secciones B, C y D de 5, 4 y 3 cm^2 respectivamente.
b) las alturas que alcanzará el agua en los tubos conectados en B, C y D.



$$(P_A/\rho) + (v_A^2/2g) + y_A = (P_D/\rho) + (v_D^2/2g) + y_D$$

donde $y_A \neq y_D$ y $P_A = P_D = P_{atmosférica}$

$$v_D = \sqrt{2\,g\,h} = \sqrt{20\ m/s^2 . 8}\ m$$

$$v_D = 12.65\ m/s$$

$$A_{(B)} . v_B = A_{(C)} . v_{(C)} = A_{(D)} . v_{(D)}$$

$$v_B = (A_{(D)} . v_{(D)}) / A_{(B)} = (3\ cm^2 . 12.65\ m/s) / 5\ cm^2 = 7.6\ m/s$$

$$v_C = (A_{(D)} v_{(D)}) / A_{(C)} = (3\ cm^2 . 12.65\ m/s) / 4\ cm^2 = 9.5\ m/s$$

Considerando que $P_{manométrica\ (B)} = \rho . h_B$ y $v_{(A)} = 0$

$$(P_{at}/\rho) + H = (P_{at} + P_{mano\ (B)}) / \rho + (v_{(B)}^2 / 2g) \times y_{(B)}$$

$$h_{(B)} = (P_{mano\ (B)}) / \rho = H - (v_{(B)}^2 / 2g) - y_{(B)}$$

$$h_{(B)} = 8 - 4 - (7.6)^2 / 20 = 1.11\ m$$

$$h_{(C)} = (P_{mano\ (C)}) / \rho$$

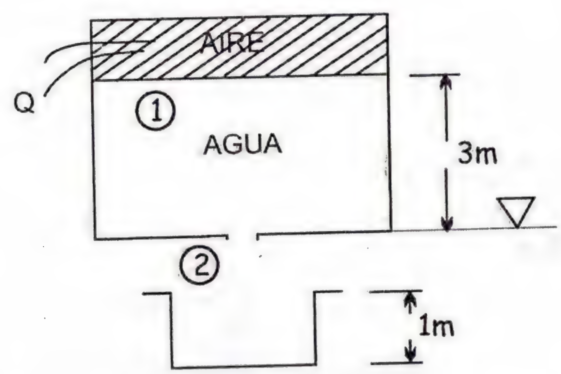
$$h_{(C)} = H - (v_{(C)}^2 / 2g) - y_{(C)}$$

$$h_{(C)} = 8 - 4.5 - 2 = 1.5\ m$$

$$h_{(D)} = (P_{mano\ (D)}) / \rho = 0\ m$$

9.- Un depósito de grandes dimensiones y cerrado por encima contiene aire a la presión manométrica de 0.2 atmósferas. Para mantener el nivel del agua a una altura de 3 m todo el tiempo, se bombea agua por medio de una tubería como indica la figura. Al practicar un orificio, en el fondo del depósito, de radio 3 cm. Determine:

a) la rapidez con que sale el agua del depósito.
b) el tiempo necesario para llenar un recipiente cúbico de 1 m de arista o lado colocado debajo del depósito.



$P_1 / \delta g + (v_1^2 / 2g) + y_1 = P_2 / \delta g + (v_2^2 / 2g) + y_2$

$P_1 = P_{mano\ (1)} = 2.07\ N/cm^2 = 0.2$ atmósferas

$v_1 = 0$ (depósito bien grande)

$y_1 = 3$ m

$P_2 = P_{mano\ (2)} = 0$ (es atmosférica)

$v_2 = ?$

$y_2 = 0$ m, nivel de referencia

$(P_{mano\ 1} / \delta g) + y_1 = v_{(2)}{}^2 / 2g$; $v_2 = \sqrt{2g \left((P_{mano\ 1} / \delta g) + y_1 \right)}$

$v_2 = \sqrt{2 (10)(2.07 + 3)\ m^2 / s^2}$

a) $v_2 = 10.1$ m/s

$Q = A \cdot v = V / \Delta t$ V = volumen Δt = tiempo

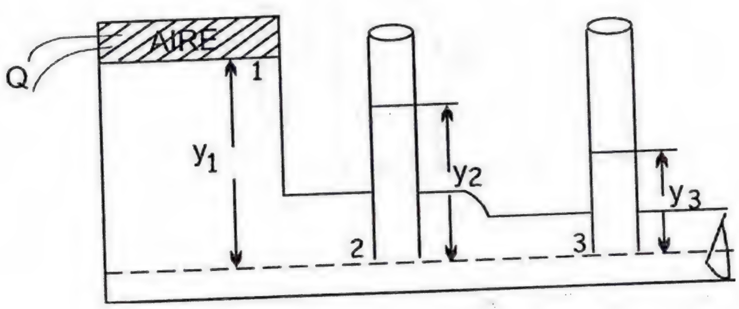
$Q = (\pi / 4)(0.06)^2 \; 10.1 \; m^3/s = 28.6 \; l/s$

$\Delta t = V/Q = (1000 \; l) / (28.6 \; l/s)$

c) $\Delta t = 35$ segundos

10.- Un depósito cerrado en la parte superior contiene aire a la presión manométrica de 1.96 N/cm^2. Para mantener el caudal de salida constante se bombea agua por medio de una tubería sellada a la pared superior del depósito la razón de 28 l/s. Las secciones de la tubería de salida en los puntos 2 y 3 son: 40 y 20 cm^2 respectivamente. Determine:

a) la altura y_1 del agua en el depósito
b) las alturas y_2, y_3 que alcanzaría el agua en los tubos delgados colocados en los puntos indicados (ver figura).



Densidad del agua $= 10^3$ kg/m^3

$Q = A_2 \cdot v_2 = A_3 \cdot v_3 = 28$ l/s

$v_2 = Q / A_2 = 700$ cm/s $= 7$ m/s

$v_3 = Q / A_3 = 1400$ cm/s $= 14$ m/s

$$(P_{mano\,(1)} / \delta g) + y_1 = (P_{mano\,(2)} / \delta g) + v_{(2)}^2 / 2g = (P_{mano\,(3)} / \delta g) + v_{(3)}^2 / 2g$$

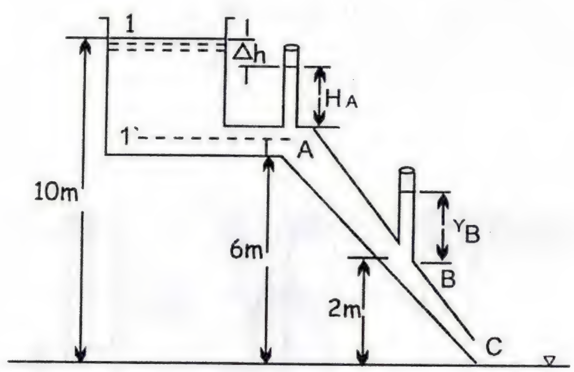
$(1.96\ N/cm^2/(10^3\ kg/m^3 \cdot 10\ m/s^2) + y_1 = y_2 + (20 m/s^2) = y_3 + (14\ m/s)^2/20 m/s^2$

a) $y_1 = 8$ m

b) $y_2 = 7.5$ m $\qquad y_3 = 0$ m

11.- Se tiene un depósito de grandes dimensiones conectado a una tubería variable como se indica en la figura determinar:

a.- las velocidades del líquido en los puntos A, B y C
b.- la altura h si se conoce que las secciones transversales de la tubería en los puntos A, B y C son 8, 7 y 6 cm^2 respectivamente.



$P_1/\delta_g + (v_1^2/2g) + y_1 = P_C/\delta_g + (v_C^2/2g) + y_C$

$P_1 = P_c = P_{atm}$

$v_C = \sqrt{2\, g\, y_1} = \sqrt{2x10x10} = 14.4$ m/s

$A_A\ v_A = A_B\ v_B = A_C\ v_C$

$v_A = A_B\ v_B / A_A \qquad v_B = A_C\ v_C / A_B$

$v_A = 1.06 cm/s \qquad v_B = 12.12$ cm/s

$P_1/\delta_g + (v_1^2/2g) + y_1 = P_2/\delta_1 g + (v_2^2/2g) + y_2$

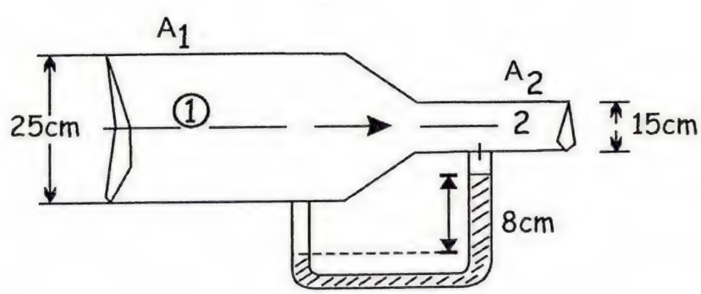
P_1 y P_2 son presiones absolutas

$4\text{ m} - v^2_A / 2g = H$

$H = 4\text{ m} - (10.6^2\text{ m/s}^2) / (20\text{ m/s}^2)$

$H = -1.62\text{ m}$

12.- El poliducto Durán - Quito de diámetro 25 cm transporta gasolina de densidad 0.7. Para medir el caudal del combustible se utiliza un tubo Venturi cuyos diámetros son 25 y 15 cm respectivamente. La diferencia de alturas entre los niveles del mercurio en el manómetro del tubo es de 8 cm. Determine el número de galones de gasolina que pasan por hora y su rapidez.
NOTA: 1 galón = 3.85 litros



δ gas = 0.7

$A_1 = 490.8\text{ cm}^2$

$A_2 = 176\text{ cm}^2$

$Q = A_1 A_2 \sqrt{(2g\ \Delta\ h)/(A_1^2 - A_2^2)}$

$Q = 23948.98\text{ cm}^3/\text{s}$

$Q = 22991.02$ gal/h

13.- En una sección D de una tubería horizontal que transporta petróleo, las energías de presión y velocidad, expresadas en columnas de agua son: 10 m y 0.50 m

respectivamente. En una sección E de la misma tubería las energías, de presión y velocidad son: 9m y 2m. Indicar:

a) ¿cuál es la sección más angosta?
b) ¿en qué dirección fluye la corriente?

$Ep_D = 1.0$ m H_2O

$Ev_D = 0.5$ m H_2O

$Ep_E = 9$ m H_2O

$E_{CE} = 2$ m H_2O

$Ec = v^2/2g$

$E_D = 0.5 \text{ m} = v_D^2/2g$ $\qquad$ $E_C = 0.5 \text{ m} = v_E^2/2g$

$v_E > v_D$

$A_E < A_D$

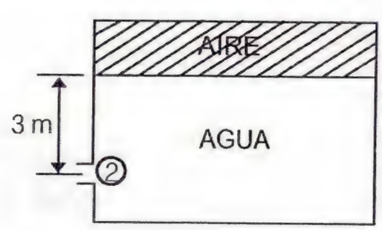
$P_D / \rho = Ep_D = 10$ m

$P_E / \rho = Ep_E = 9$ m

$P_D > P_E$

El agua fluye de E a D.

14.- El agua ($\delta = 1.0$) que se encuentra en un depósito cerrado de gran tamaño está sujeta a una presión manométrica de 0.20 kg*/cm^2, ejercida por el aire comprimido introducido en la parte superior del depósito. En la pared lateral del mismo hay un pequeño orificio situado a 3 m por debajo del nivel del agua. Calcule la rapidez en m/s con la cual sale el agua por este orificio.



$P_{man} = 0.19\ kg^*/cm^2 = 1900\ gr^*/cm^2$

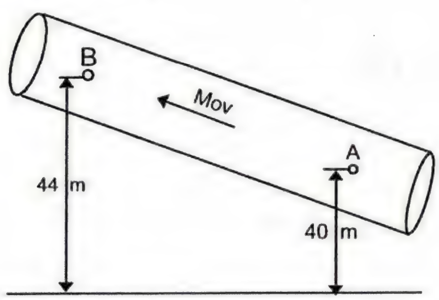
$P_1/\rho_1 + (v_1^2/2g) + y_1 = P_2/\rho_2 - (v_2^2/2g) + y_2$

$(P_{man}/\rho) + y = v_2^2/2g$

$v_2 = 9.9\ m/s$

15.- En dos puntos diferentes A y B de una tubería inclinada por la que fluye agua, se toman las siguientes lecturas. La presión, velocidad y altura en A son: 14.7 N/cm^2; 6.26 m/s y 40 m respectivamente; en el punto B, tenemos: 5.89 N/cm^2; 7.67 m/s y 44 m. Determine:

a) en base de cálculos, si el líquido fluye de A hacia B o de B hacia A.
b) la energía perdida en "Joules" por unidad de masa "kilogramos" al fluir el líquido de un punto al otro.



$P_A = 14.7\ N/cm^2 = 147000\ N/m^2$ $P_B = 5.89\ N/cm^2 = 58900\ N/m^2$

$v_A = 6.26\ m/s$ $v_B = 7.67 m/s$

$h_A = 40\ m$ $h_B = 44\ m/s$

$P_A/\rho_1 + (v_A^2/2g) + y_A = P_B/\rho_1 + (v_B^2/2g) + y_B$

$(147000/1000) + 6.26^2/2g + 40 = (58900/1000) + 7.67^2/2g + 44$

$188.95 = 105.84$ Falso

$E_{TA} = 188.95\ J$

$E_{TA} = 105.84\ J$

$E_{TA} > E_{TA}$ Fluye de A hacia B

16.- Un reservorio se encuentra 100 m más alto que la casa de máquinas. Si el caudal que pasa a las máquinas es 1.5 m^3/s. Calcule la potencia de la turbina (en kw) asumiendo un rendimiento del 90%.

$Q = 1.5\ m^3/s$

$\eta = 0.9$

$P_{turbina} = ?$

$P_{turbina} = \rho_L Q h$

$P_{entrada} = ((1000\ kg^*/m^3).\ 1.5\ m^3/s \times 100\ m) / 0.9$

$P_{entrada} = 1.6x10^6 W = 2222.22\ HP$

$P_{sale} = \rho_L Q h$

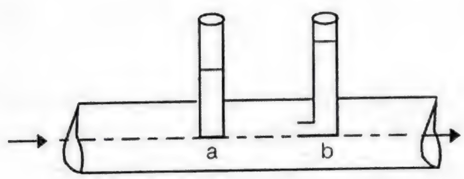
$P_{sale} = (1000\ kg^*/m^3)\ .\ 1.5\ m^3/s \times 100\ m$

$P_{sale} = 1.5x\ 10^6\ W = 2000\ HP$

PROBLEMAS PROPUESTOS

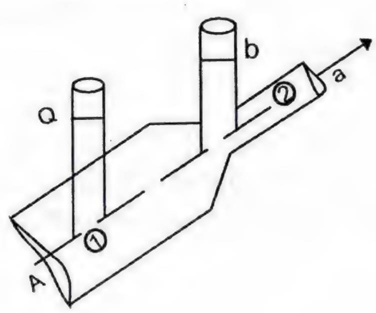
1.- En dos puntos cercanos "a" y "b", de una tubería horizontal por la que fluye agua (densidad = 1.0) se colocan tubos delgados como se indica en la figura. En el tubo "a" el agua sube hasta una altura de 2.50 m y en el tubo "b" hasta 2.80 m. Determine:

a) la velocidad y la presión en ese sector de la tubería
b) el caudal en l/s, si el diámetro de la tubería es de 1.5cm



2.- El tubo representado en la figura tiene una sección transversal de 25 cm^2 en la parte ancha y 20 cm^2 en la parte angosta. Por la tubería fluye agua a razón de 20 l/s; el punto 1 se encuentra a una altura de 18 m y el punto 2 a 20 m de altura donde la presión es igual a 2 N/cm^2.

a) ¿cuánto subirá el agua en los tubos "a" y "b"?
b) desde el punto de vista energético, determine en que dirección fluye el agua.



3.- Una lámina de 75 cm^2 de superficie está articulada a lo largo de uno de sus lados y su masa es 0.5 kg. ¿ Con qué velocidad debe soplarse el aire sobre la lámina, para que esta se ponga horizontal?
Densidad del aire es 1.29×10^{-3}

4.- A través del tubo principal del medidor Venturi pasa una corriente de aire de 15 l/min. La sección tranversal de la parte ancha del tubo es 2 cm^2. Determine la diferencia de nivel Δh, que tendrá el agua en el tubo en "U".
Densidad del aire 1.29×10^{-3}

5.- Por un tubo que circula agua, ($\delta = 1.0$) su velocidad es 0.60 m/s en un cierto punto y la presión manométrica 25 N/cm^2. Otro punto que se encuentra a 15 m por debajo del primero tiene una sección tranversal igual a la mitad de la sección del primer punto. Calcule la presión manométrica en el segundo punto.

6.- El agua, de densidad 1.0, que sale de un depósito pasa por una turbina situada a 100 m por debajo del mismo. El rendimiento de la turbina es del 80% y recibe un caudal 2.7 m^3/ min de agua. Calcule la potencia mecánica de la turbina.

7.- Una bomba de incendios eleva agua desde un lago, a razón de 4500 kg/min y la expulsa por una manguera, hasta una altura de 5 m por encima del nivel del lago con una rapidez de 9.6 m/s. ¿Qué potencia a de tener el motor de la bomba?

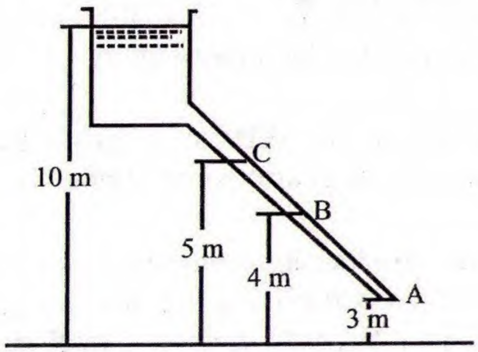
8.- Un tubo horizontal de 37.5 cm^2 de sección tranversal se estrecha hasta que su sección sea 12.5 cm^2. Por el tubo pasa agua de densidad 1.2 g/cm^3 con una rapidez de 54 m/min por la parte ancha de la tubería, donde se lee una presión manométrica de 0.80 kg^*/cm^2.¿Cuál es la presión manométrica en la parte angosta del tubo?. El barómetro señala una presión de 75 cm de mercurio.

9.- En un punto determinado de una tubería horizontal la presión manométrica es 0.45 kg^*/cm^2 mientras que en otro punto de la misma tubería la presión manométrica es 0.32 kg^*/cm^2. Las secciones del tubo en estos dos puntos son 20 cm^2 y 10 cm^2 respectivamente, calcular el número de litros de agua que fluye cada minuto por una sección cualquiera de la tubería.

10.- Una tubería tiene en un punto un diámetro de 50 cm, una presión de 20 N/cm^2 y se encuentra 30 m más bajo que otro punto en el que el diámetro es de 20 cm. Por la tubería circulan 0.05 m^3/s de un líquido de densidad 0.80. Calcule la presión en este último punto.

11.- Un recipiente de gran tamaño contiene agua de densidad $10^3 kg/m^3$ y está conectado a un tubo inclinado de sección variable como se indica en la figura. En los puntos A, B y C, la sección del tubo es 1, 2 y 3 cm^2 respectivamente. Determine:

a) La diferencia de presiones entre los puntos A y B.
b) La velocidad de salida del agua por el punto A.



12.- El agua de un tanque, que está sobre el piso tiene dos huecos uno encima del otro sobre el mismo lado del tanque. Los agujeros están a 3,6 cm y 10 cm sobre el piso ¿A qué altura está el agua en el tanque cuando los chorros que salen de los huecos tocan el piso en el mismo punto?

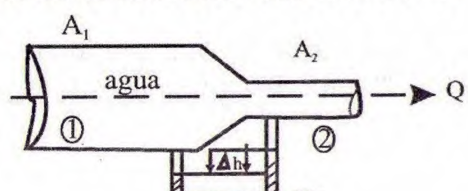
13.- Determine el número de litros de agua por minuto que deben caer desde una presa hasta una turbina que se encuentra 70 m más abajo, con el objeto de generar una potencia de 2 kw. Se supone que no se desperdicia energía. Peso específico del agua = 10^3 kg*/m^3 .

14.- Un avión vuelta horizontalmente, el ala del avión pesa 240 N y tiene un área de 3.5 m ^{2} Se conoce además que la rapidez del aire de densidad 0.0013 en la parte superior del ala es 60 m/s y en la inferior de 45 m/s. Determine:

a) La fuerza que ejerce el aire sobre el ala.
b) La fuerza total sobre el ala del avión.

15.- El tubo de la figura tiene una sección de 36 cm^2 en la parte ancha y 9 cm^2 en el estrechamiento. Cada 5 s salen del tubo 27 l de agua. Determine:

a) La rapidez del líquido en las partes ancha y angosta.
b) La diferencia de presiones entre las dos secciones del tubo
c) La diferencia de alturas entre los niveles del mercurio.



16.- En cierto punto de un tubo horizontal la presión manométrica es 0.5 kg*/cm^2, mientras que en otro punto del mismo tubo la presión manométrica es 0.35 kg*/cm^2. Conociendo que las secciones del tubo son 20 cm^2 y 10 cm^2 respectivamente, determine el caudal o gasto en l/s.

17.- Un soplete tiene un diámetro de 5x10^{-2} m y gasta 8x10^{-3} m^3 de aire por segundo. ¿ Con que rapidez pasa el aire por el conducto?

18.- Una tubería horizontal que conduce agua aumenta su sección transversal de 10 cm^2 a 20 cm^2 ;la diferencia de presión entre las dos secciones de 10^{3}N/m^2. ¿ Cuál es la rapidez del agua en cada sección y cual es el gasto o caudal del líquido? Considere que el régimen es estable.

19.- Por un tubo horizontal fluye agua pasando por cualquier sección a razón de 0.02 m^3/s. En una región el tubo tiene un área de 2x10^{-3} m^2 ; en esta región la presión es de 1.2 N/m^2.En otra sección el área es de 8x10^{-3} m^2 . Determine la rapidez del agua en cada sección y la presión en la segunda. Considere el flujo estacionario.

20.- Se reduce uniformemente el diámetro de un pequeño tramo de tubería de 8 cm a 3 cm. La rapidez del agua en la sección mayor es de 2 m/s. Halle la diferencia de presión en los extremos de dicho tramo de tubería si esta situada horizontalmente.

21.- Se tiene un tubo inclinado, de sección uniforme, por el cual fluye agua. La presión en un punto del tubo situado a 10 m del suelo excede a la presión en otro punto más alto en 2x10^5 N/m^2. ¿A qué altura está este segundo punto? Considere el régimen estacionario.

22.- Un tubo de sección uniforme contiene agua que fluye con régimen estable, su inclinación con respecto a la horizontal es de 30º, la rapidez del agua en un punto a 10 m de altura es de 12 m/s y la presión es de 3x10^5 N/m^2. ¿Cuál es la rapidez del agua en un punto situado a 4 m por debajo del anterior y cuál es la presión en dicho punto?

23.- Una tubería horizontal de sección variable que conduce agua aumenta su sección transversal de 10 cm^2 a 30 cm^2. La diferencia de presión entre las dos

secciones es de 10^5 N/m^2. ¿Cuál es la rapidez del agua en cada sección y cuál es el caudal o gasto? Considere que el régimen es estacionario.

24.- El aire de una región fluye horizontalmente al encuentro de un ala de avión que pesa 2.4 N y tiene un área de 3.34 m^2. La rapidez del aire en la parte superior del ala es de 61 m/s y en la parte inferior es de 45.7 m/s . Determine :

a.- la fuerza ascencional que actúa sobre el ala
b.- la fuerza neta que actúa sobre el ala del avión

25.-Una tubería horizontal tiene un radio de 0.1 m, con esa sección la presión del líquido que circula por la tubería es de $2x10^5$ Pa y la rapidez es de 4 m/s. En otra sección del tubo la presión se reduce a 10^5 Pa. Determine :

a.- la rapidez del líquido en la última sección del tubo
b.- el radio del tubo en esta sección.
NOTA: El líquido que fluye por la tubería es agua de mar de densidad 1.2

26.- Al observar un chorro de agua que cae desde una pileta se nota claramente que el chorro se hace cada vez más fino.
a.- ¿qué se puede decir de la rapidez del fluido?
b.- ¿En qué posición del chorro se llenará un recipiente más lentamente?

27.- Por una tubería horizontal de sección variable fluye un líquido de densidad δ, si la sección del tubo se reduce posteriormente a la mitad y la diferencia de presiones del líquido entre las dos secciones de la tubería es ΔP. Determine la rapidez del líquido en la sección mayor del tubo.

28.- Determinar la diferencia de presión entre dos puntos de una tubería de sección constante e inclinada un ángulo θ con la horizontal, por la que fluye estacionariamente un líquido incompresible de densidad 6.
Se conoce que la distancia de separación entre los puntos mencionados es L.

29.- ¿A qué altura del nivel libre de un líquido, que se encuentra en un recipiente cilíndrico, debe abrirse un orificio de 1 cm^2 de área en la pared del cilindro para que una vasija de 10^{-3} m^3 de capacidad se llene en 5 s?. Considere que el nivel del líquido en el recipiente cilíndrico no cambia en el transcurso del tiempo.

30.- Si por encima del techo de una casa pasa una ráfaga de viento muy grande , el techo se levanta. Utilizando la ecuación de Bernoulli, explique lo que sucede.